

## Разложения стандартных функций

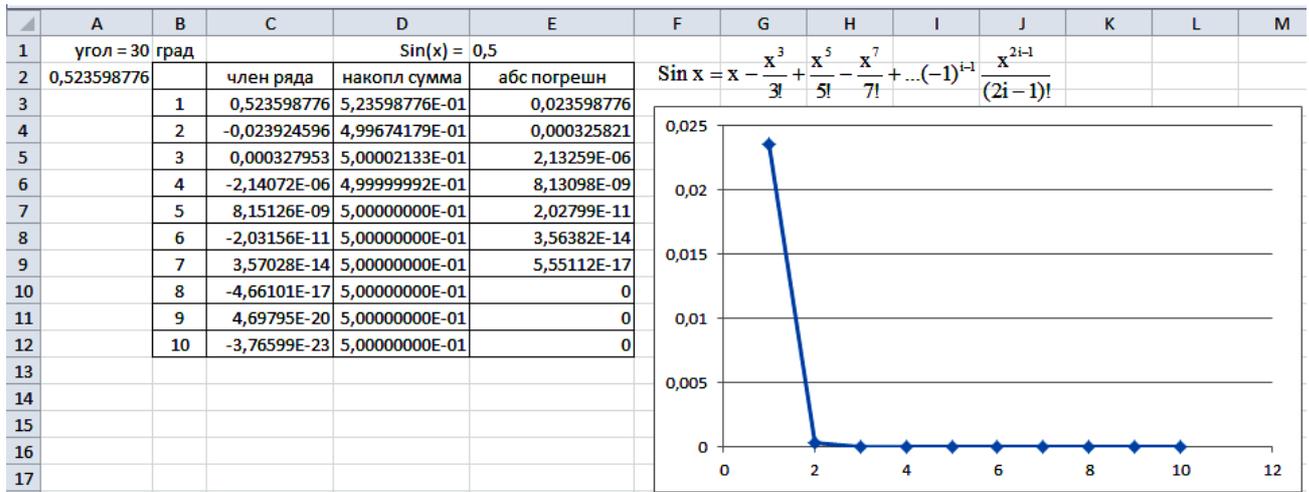
**Пример.** Требуется рассчитать значения функции для выбранного значения аргумента по формуле разложения в степенные ряды с точностью  $10^{-5}$  и сравнить результат со значением, полученным с помощью стандартных функций MSExcel:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots (-1)^{i-1} \frac{x^{2i-1}}{(2i-1)!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots (-1)^n \frac{x^{2i}}{(2i)!}$$

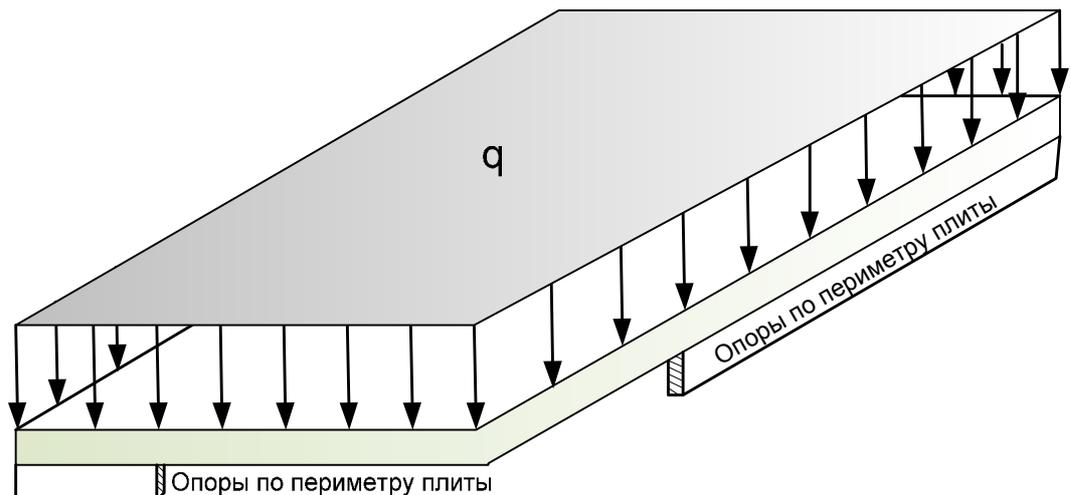
$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{2i-1} \frac{x^{2i-1}}{(2i-1)!}$$

Пример расчета функции синус показан на рисунке



## Двойной тригонометрический ряд Фурье

**Задача.** Прогиб плиты



Плита, нагруженная равномерно распределенной нагрузкой  
 Математической моделью, описывающей этот процесс, является дифференциальное уравнение четвертого порядка – уравнение Софи-Жермен:

$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = q$$

где  $w$  – прогиб,  $D$  – цилиндрическая жесткость пластины.

$$D = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \mu^2)} \quad (4.3)$$

Здесь  $E$  – модуль упругости материала пластины;  $h$  – толщина плиты;  $\mu$  – коэффициент поперечной деформации (Пуассона) материала; для стали  $\mu = 0,3$ .

Известно решение уравнения в форме разложения в двойной тригонометрический ряд Фурье, предложенное Навье:

$$w = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} K \cdot \sin \frac{px_i}{a} \cdot \sin \frac{py_j}{b}$$

где

$$K = \frac{16q}{D p^{6ij} \left( \frac{i^2}{a^2} + \frac{j^2}{b^2} \right)}$$

$a$  и  $b$  – соответственно, длина и ширина пластины.

Граничные условия (опоры по периметру пластины):

$$w|_{x=0} = 0 \quad w|_{x=b} = 0 \quad w|_{y=0} = 0 \quad w|_{y=a} = 0$$

Для практического применения формулу записывают так:

$$w = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n K \cdot \sin \frac{px_i}{a} \cdot \sin \frac{py_j}{b}$$

Решим сначала задачу для точки с максимальным прогибом.

1) Зададим исходные данные.

Верхняя таблица будет для расчета значений коэффициента  $K$  при разных номерах члена ряда. Номера члена ряда  $i$  задаем в строке 2 в столбцах от F до J. Четные номера пропускаем, чтобы не выполнять лишнюю работу – синусы таких значений равны нулю.

Номера члена ряда  $j$  задаем в столбце E в строках от 3 до 7.

Вторая таблица нужна для вычисления каждого члена ряда – составной части прогиба.

В K16 введем формулу автосуммы. Здесь будут просуммированы все члены двойного ряда. Пока сумма равна нулю.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	$\mu =$	0,3		K							
2	$E =$	2E+11 Па			0	1	3	5	7	9	
3	$h =$	0,05 м			1						
4	$q =$	10000 Н/кв.м			3						
5	$a =$	5 м			5						
6	$b =$	3 м			7						
7	$D =$	2289377			9						
8	$n=m =$	9									
9	$x =$	2,5 м		w							
10	$y =$	1,5 м			0	1	3	5	7	9	
11					1						
12					3						
13					5						
14					7						
15					9						
16										$w(x,y) =$	0 м

2) В F3 введем формулу расчета коэффициента K.

F3		fx = 16*\$B\$4/\$B\$7/ПИ()^6/F\$2/\$E3/(F\$2^2/\$B\$5^2+\$E3^2/\$B\$6^2)											
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	мю =	0,3		K									
2	E =	2E+11 Па			0	1	3	5	7	9	$K = \frac{16q}{D\pi^6 ij \left( \frac{i^2}{a^2} + \frac{j^2}{b^2} \right)}$		
3	h =	0,05 м			1	0,000481	5,14E-05	1,31E-05	5,01E-06	2,41E-06			
4	q =	10000 Н/кв.м			3	2,33E-05	5,94E-06	2,42E-06	1,17E-06	6,35E-07			

3) Копируем эту формулу по остальным ячейкам первой таблицы.

4) Во вторую таблицу вводим формулу расчета текущего члена ряда. Начнем с ячейки F11.

F11		fx = F3*SIN(ПИ()*\$B\$9*F\$10/\$B\$5)*SIN(ПИ()*\$B\$10*\$E11/\$B\$6)										
	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M		
10		0	1	3	5	7	9					
11	j	1	0,000481	-5,1E-05	1,31E-05	-5E-06	2,41E-06	$w = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} K \cdot \sin \frac{\pi xi}{a} \cdot S$				
12		3	-2,3E-05	5,94E-06	-2,4E-06	1,17E-06	-6,4E-07					
13		5	5,16E-06	-1,5E-06	7,7E-07	-4,4E-07	2,68E-07					
14		7	-1,9E-06	5,96E-07	-3,2E-07	2E-07	-1,3E-07					
15		9	8,93E-07	-2,9E-07	1,62E-07	-1,1E-07	7,33E-08					

5) Копируем эту формулу по остальным ячейкам второй таблицы. В K16 получаем максимальный прогиб – прогиб в центре плиты, который равен 0,424 мм при нагрузке 1т/кв.м и толщине плиты из стали 50 мм.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	мю =	0,3		K				i			
2	E =	2E+11 Па			0	1	3	5	7	9	$K = \frac{16q}{D\pi^6}$
3	h =	0,05 м		j	1	0,000481	5,14E-05	1,31E-05	5,01E-06	2,41E-06	
4	q =	10000 Н/кв.м			3	2,33E-05	5,94E-06	2,42E-06	1,17E-06	6,35E-07	
5	a =	5 м			5	5,16E-06	1,54E-06	7,7E-07	4,38E-07	2,68E-07	
6	b =	3 м			7	1,89E-06	5,96E-07	3,22E-07	2E-07	1,33E-07	
7	D =	2289377			9	8,93E-07	2,88E-07	1,62E-07	1,05E-07	7,33E-08	
8	n=m =	9									
9	x =	2,5 м		W			i				
10	y =	1,5 м			0	1	3	5	7	9	$w = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty}$
11				j	1	0,000481	-5,1E-05	1,31E-05	-5E-06	2,41E-06	
12					3	-2,3E-05	5,94E-06	-2,4E-06	1,17E-06	-6,4E-07	
13					5	5,16E-06	-1,5E-06	7,7E-07	-4,4E-07	2,68E-07	
14					7	-1,9E-06	5,96E-07	-3,2E-07	2E-07	-1,3E-07	
15					9	8,93E-07	-2,9E-07	1,62E-07	-1,1E-07	7,33E-08	
16											w(x,y) = 0,000424 м

6) Построим график прогибов плиты по точкам через 1 м. Подготовим таблицу. По краям плиты из-за опор прогиб равен нулю.

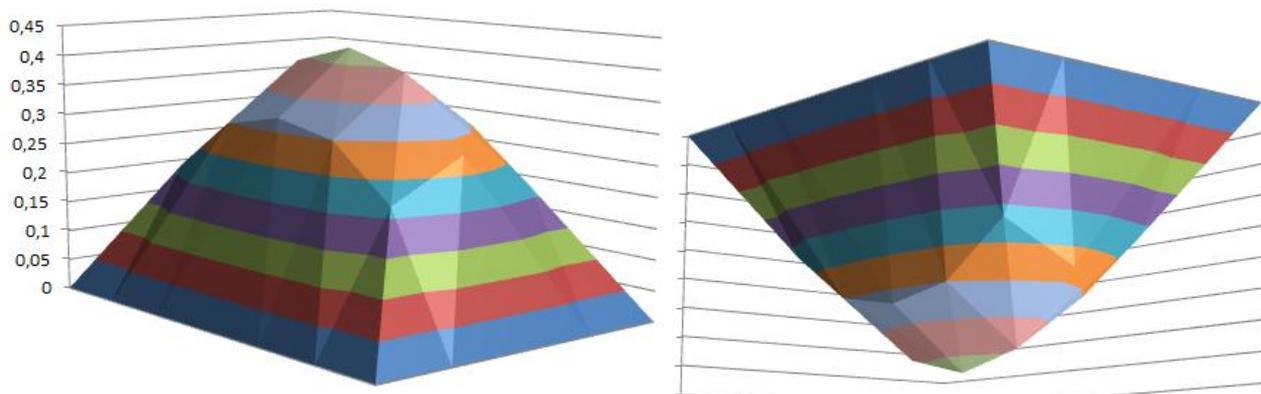
	B	C	D	E	F	G	H	I	J	
18				X						
19			0	0,83	1,67	2,5	3,33	4,17	5	
20		0	0	0	0	0	0	0	0	
21		0,75	0						0	
22	Y	1,5	0						0	
23		2,25	0						0	
24		3	0	0	0	0	0	0	0	

7) Задаем начальную точку для расчета  $x = 0,83$  м,  $y = 0,75$  м. Результат из K16 копируем в E21. При копировании, чтобы произошла только вставка результата, а не формулы, используем команду **Вставить значения**.

The screenshot shows the Excel interface with the 'Paste' menu open. The 'Paste values' option is highlighted with a red box. A red arrow points from this option to cell E21 in the spreadsheet. Another red arrow points from the value '0,216' in cell K17 to cell E21. The spreadsheet data is as follows:

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
15				9	3,15E-07	2,03E-07	5,81E-08	-3,6E-08	-5,2E-08		
16										$w(x,y) =$	0,000216 м
17										0,216	мм
18				X						середина	0,424 мм
19			0	0,83	1,67	2,5	3,33	4,17	5		
20		0	0	0	0	0	0	0	0		
21		0,75	0								
22	Y	1,5	0								
23		2,25	0								
24		3	0	0	0	0	0	0	0		

8) Аналогично рассчитываем значения в остальных узловых точках плиты и строим график типа поверхность. График получается перевернутым сверху-вниз. Так он выглядит нагляднее, хотя на самом деле, прогиб происходит вниз и в формулах следовало бы поставить знак минус.



Разложение в ряды эффективно использовать в тех случаях, когда исходная формула слишком сложна, как например, в нашем случае. Решать дифференциальное уравнение четвертого порядка в частных дифференциалах  $D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) = q$  численным методом - очень непростая задача. Применяя ее разложение в двойной тригонометрический ряд, позволило получить ответ с наименьшими усилиями.