Лабораторная 3.
Моделирование нестационарного теплообменного процесса методом разложения дифференциального уравнения теплопроводности в тригонометрический ряд

Уравнение нестационарной теплопроводности:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{1}$$

где a - м2/с - *коэффициент температуропроводности* материала стенки, характеризующий материал с точки зрения скорости изменения в нем нестационарного температурного поля.

$$a = \frac{l}{cr} \tag{2}$$

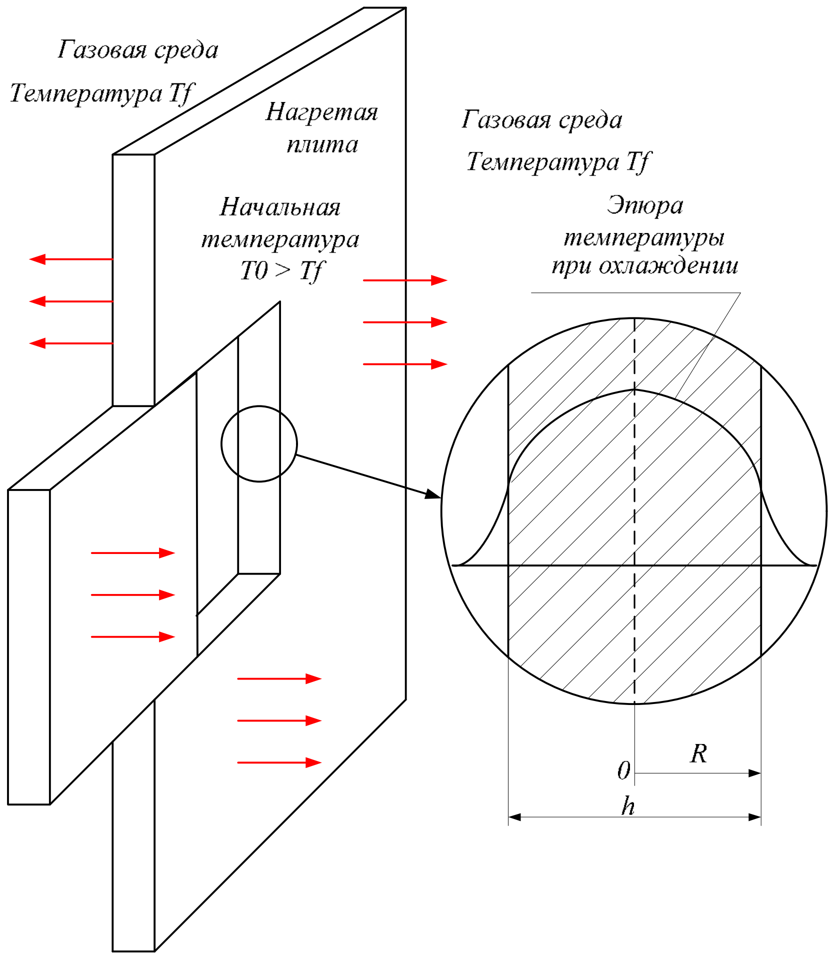


Рис. 1. Эпюра распределения температур по толщине пластины

Дифференциальное уравнение *нестационарной теплопроводности* представляет собой уравнение второго порядка в частных производных; при его интегрировании появятся три константы интегрирования, для определения которых необходимы три независимых условия однозначности. Такие условия (одно по времени и два по координате) должны быть сформулированы как независимая от самого дифференциального уравнения дополнительная физическая информация о рассматриваемом процессе.

Начальным условием здесь служит известное (в данном случае - постоянное) распределение температуры в стенке в начальный момент времени ее охлаждения:

$$T\,|_{t=0} = T_0 \tag{3}$$

Граничные условия на наружных поверхностях симметричны и потому, по существу, являются одним условием, которое состоит, как это было и при стационарной теплопроводности, в равенстве количеств кондуктивно подводимой теплоты изнутри материала к его наружной поверхности и отводимой от этой поверхности теплоты за счет конвективной теплоотдачи:

$$-\,l\,\frac{\partial T}{\partial x}\,|_{x=\pm R} = a\left(T\,|_{x=\pm R} - T_f\right) \tag{4}$$

Второе граничное условие - это симметричность искомого температурного профиля. Действительно, поскольку само рассматриваемое тело, начальное распределение температуры и условия охлаждения симметричны относительно центральной плоскости при $x = 0$, то и в любой момент времени охлаждения искомое распределение температуры в теле плоской формы должно быть симметричным. При охлаждении такое условие означает максимальное значение температуры в плоскости симметрии, т. е. при $x = 0$:

$$\frac{\partial T}{\partial x}\,|_{x=0} = 0 \tag{5}$$

Таким образом, дифференциальное уравнение нестационарной теплопроводности, начальное и условия однозначности представляют собой замкнутое математическое описание процесса охлаждения тела плоской формы. Формулы 1, 2, 3, 4 5 представляют собой **математическую модель процесса охлаждения пластины**.

Выбор метода решения

Рассмотрим задачу об охлаждении тела плоской формы и решение двумя способами:

- разложения в тригонометрический ряд (метод Фурье);
- численным методом.

Для упрощения решения, а также с целью получения решения в обобщенном виде в качестве искомой функции, полезно использовать относительную (по отношению к полной амплитуде изменения температуры) избыточную (по отношению к температуре окружающей среды) температуру. Назовем ее безразмерной температурой:

$$q(t, x) = \frac{T(t, x) - T_f}{T_0 - T_f} \tag{6}$$

При этом математическая модель 1, 2, 3, 4 5 примет вид:

$$\frac{\partial q}{\partial t} = a\,\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \tag{7}$$

$$q\,|_{t=0} = 1; \qquad -\,l\,\frac{\partial q}{\partial x}\,|_{x=R} = a q\,|_{x=R}; \qquad \frac{\partial q}{\partial x}\,|_{x=0} = 0 \tag{8}$$

Эти соотношения математической модели нестационарного процесса охлаждения пластины можно представить в виде тригонометрического ряда Фурье, который является исходным для компьютерного моделирования процесса:

$$q(t, x) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin m_k}{m_k + \sin m_k \cos m_k} \cos\left(m_k\,\frac{x}{R}\right) \exp\left(-\,m_k^2\,\frac{at}{R^2}\right) \tag{9}$$

где $\mu_к$ – константы интегрирования. Т.к. число членов ряда бесконечно, то констант также бесконечное количество. В практических решениях число членов ряда ограничивается определенным количеством, исходя из требуемой точности решения.

Константы интегрирования можно вычислить графически (рис. 2):

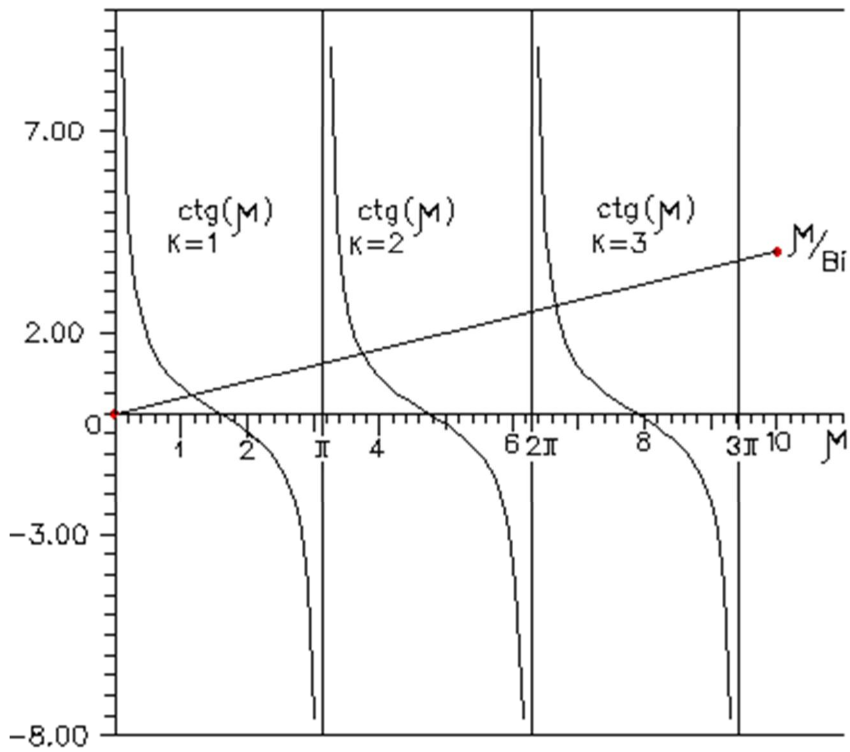


Рис. 2. Графическая интерпретация определения констант интегрирования

Точка пересечения графика функции ctg и прямой дает константу интегрирования при текущем члене ряда К. Такой способ расчета будет реализован в данной лабораторной работе.

По соотношению 9 можно рассчитать нестационарные поля температуры внутри пластины в различные моменты времени после начала процесса охлаждения. Ряд сходится тем быстрее, чем больше значение безразмерного времени охлаждения $a\tau/R^2$ критерия Фурье:

Fo = $a\tau/R^2$.

Решение задачи представлено в безразмерной форме, где безразмерными являются не только температура $\theta = \mathrm{f}(a\tau/R^2, x/R)$, но также время (Fo) и координата внутри тела x/R. После решения задачи в безразмерном виде можно вернуться к размерным параметрам.

Решение задачи в табличном процессоре

На листе1 подготовьте исходные данные.

Решать будем, выбрав первые 10 членов ряда (К = 1..10).

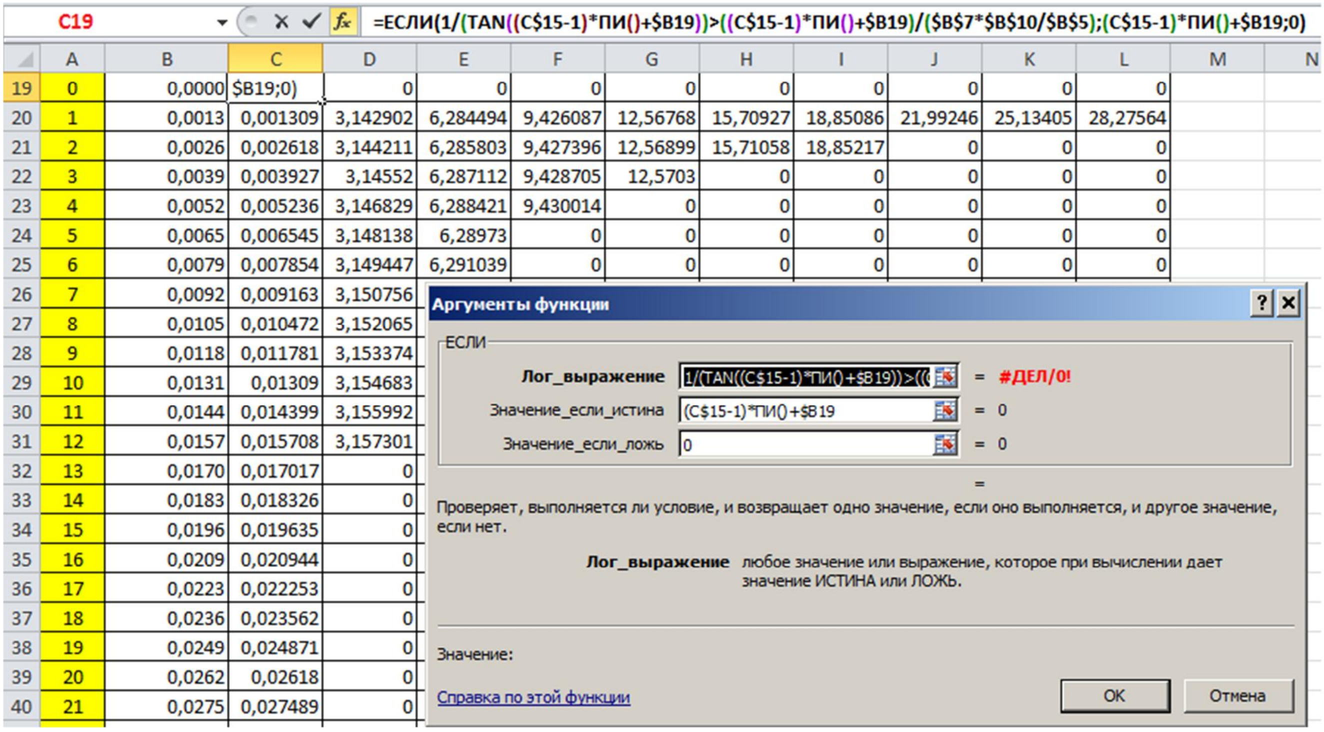
Для температуропроводности, полутолщины и величины шага введите формулы.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	T0 =	120	нач. тем-ра			t \ x	0	5	10	15	20	25	
2	Tcp =	20	тем-ра среды			0							
3	c =	465	теплоемкость			100							
4	po =	7800	плотность			200							
5	L=	47	теплопроводность			300							
6	a =	0,00001296	температуропроводность			400							
7	alfa=	100	коэф-т теплообмена			500							
8	h =	0,050	толщина			600							
9	n =	5	число шагов по толщине пластины										
10	R =	0,025	полутолщина										
11	dh =	0,005	шаг по толщине					расч. тем-ра					
12													
13	x =	0,005	тек координата										
14	t =	100	тек время										
15		K =	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Сумма
16		Тетта =											

Рис. 3. Исходные данные

В столбце А, начиная с А19, вводится номер шага по координате константы интегрирования μ до значения, допустим, 192 (строка 211).
В столбец В, начиная с В19, вводится формула расчета самой координаты константы интегрирования μ, через число пи. Шаг изменения –π / 2400. Шаг очень мал, чтобы повысить точность вычисления константы μ.
Далее в ячейку С19 введем формулу:

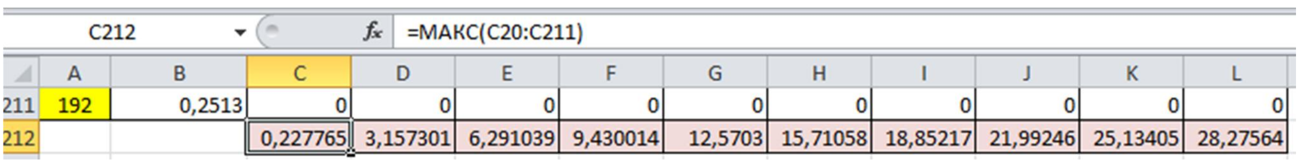
=ЕСЛИ(1/(TAN((C$15-1)*ПИ()+$B19))>((C$15-1)*ПИ()+$B19)/($B$7*$B$10/$B$5);(C$15-1)*ПИ()+$B19;0)



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
19	0	0,0000	$B19;0)	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	1	0,0013	0,001309	3,142902	6,284494	9,426087	12,56768	15,70927	18,85086	21,99246	25,13405	28,27564
21	2	0,0026	0,002618	3,144211	6,285803	9,427396	12,56899	15,71058	18,85217	0	0	0
22	3	0,0039	0,003927	3,14552	6,287112	9,428705	12,5703	0	0	0	0	0
23	4	0,0052	0,005236	3,146829	6,288421	9,430014	0	0	0	0	0	0
24	5	0,0065	0,006545	3,148138	6,28973	0	0	0	0	0	0	0
25	6	0,0079	0,007854	3,149447	6,291039	0	0	0	0	0	0	0
26	7	0,0092	0,009163	3,150756								
27	8	0,0105	0,010472	3,152065								
28	9	0,0118	0,011781	3,153374								
29	10	0,0131	0,01309	3,154683								
30	11	0,0144	0,014399	3,155992								
31	12	0,0157	0,015708	3,157301								
32	13	0,0170	0,017017	0								
33	14	0,0183	0,018326	0								
34	15	0,0196	0,019635	0								
35	16	0,0209	0,020944	0								
36	17	0,0223	0,022253	0								
37	18	0,0236	0,023562	0								
38	19	0,0249	0,024871	0								
39	20	0,0262	0,02618	0								
40	21	0,0275	0,027489	0								

Рис. 4. Расчет констант интегрирования для 10 членов ряда

Эту формулу скопируем по всем ячейкам таблицы С19:L211.
С ее помощью найдем точку пересечения котангенсоиды с прямой μ / Bi (см. рис. 2).
Это будет найденная константа интегрирования для текущего члена ряда.
В таблице это будет последнее значение в каждом ряду, для которого выполняется условие и, значит, для него еще не печатается в ячейку 0.
Далее под этой таблицей отловим значения этих констант интегрирования. Для этого в ячейку С212 введем формулу МАКС(С20:С211). Строку 19 не затрагиваем – она ничего не дает, лишь приводит к ошибке из-за деления на ноль.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
211	192	0,2513	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
212			0,227765	3,157301	6,291039	9,430014	12,5703	15,71058	18,85217	21,99246	25,13405	28,27564

Рис. 5. Выделение окончательного значения констант интегрирования

Копируем эту формулу для всех десяти констант интегрирования.
Константы известны. Теперь можно перейти к расчету температур.

В ячейку C16 вводим формулу:
=2*SIN(C212)/(C212+SIN(C212)*COS(C212))*COS(C212*$B$13/$B$10)*EXP(-(C212^2)*$B$6*$B$14/$B$10^2)

C16 | =2*SIN(C212)/(C212+SIN(C212)*COS(C212))*COS(C212*$B$13/$B$10)*EXP(-(C212^2)*$B$6*$B$14/$B$10^2)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
15		K =	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Сумма	
16		Тетта =	0,904841	-8,4E-12	1,77E-39	2,92E-84	-3E-146	1,9E-226	0	0	0	0	0,904841	

Рис. 6. Расчет безразмерной температуры для каждого члена ряда

В ячейке M16 подсчитаем сумму всех 10 членов ряда.

Осталось перейти к размерной температуре. Это сделаем в ячейке J11.

J11 | =B2+(B1-B2)*M16

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	T0 =	120	нач. тем-ра			t \ x	0	5	10	15	20	25	
2	Tср =	20	тем-ра среды			0	120	120	120	120	120	120	
3	c =	465	теплоемкость			100		110,4841					
4	po =	7800	плотность			200							
5	L=	47	теплопроводность			300							
6	a =	0,00001296	температуропроводность			400							
7	alfa=	100	коэф-т теплообмена			500							
8	h =	0,050	толщина			600							
9	n =	5	число шагов по толщине пластины										
10	R =	0,025	полутолщина										
11	dh =	0,005	шаг по толщине					расч. тем-ра		110,4841			
12													
13	x =	0,005	тек координата										
14	t =	100	тек время										
15		K =	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Сумма
16		Тетта =	0,904841	-8,4E-12	1,77E-39	2,92E-84	-3E-146	1,9E-226	0	0	0	0	0,904841

Рис. 7. Получение температуры в размерном виде

Заполняем таблицу с результатами.
Для начального момента времени введем начальную температуру по всей полутолщине пластины из ячейки B1.
Остальные ячейки таблицы заполняем, изменяя ячейки B13 и B14.
Получается таблица с результатами моделирования.

t \ x	0	5	10	15	20	25
0	120	120	120	120	120	120
100	110,578	110,484	110,202	109,734	109,079	108,239
200	101,341	101,257	101,004	100,583	99,995	99,240
300	93,046	92,971	92,743	92,365	91,837	91,160
400	85,597	85,529	85,325	84,986	84,511	83,903
500	78,908	78,847	78,664	78,359	77,933	77,387
600	72,901	72,846	72,681	72,408	72,025	71,535

Рис. 8. Таблица с результатами расчетов

Задание 1. По данным таблицы постойте динамику изменения температуры на поверхности и в центре пластины на период 10 минут.

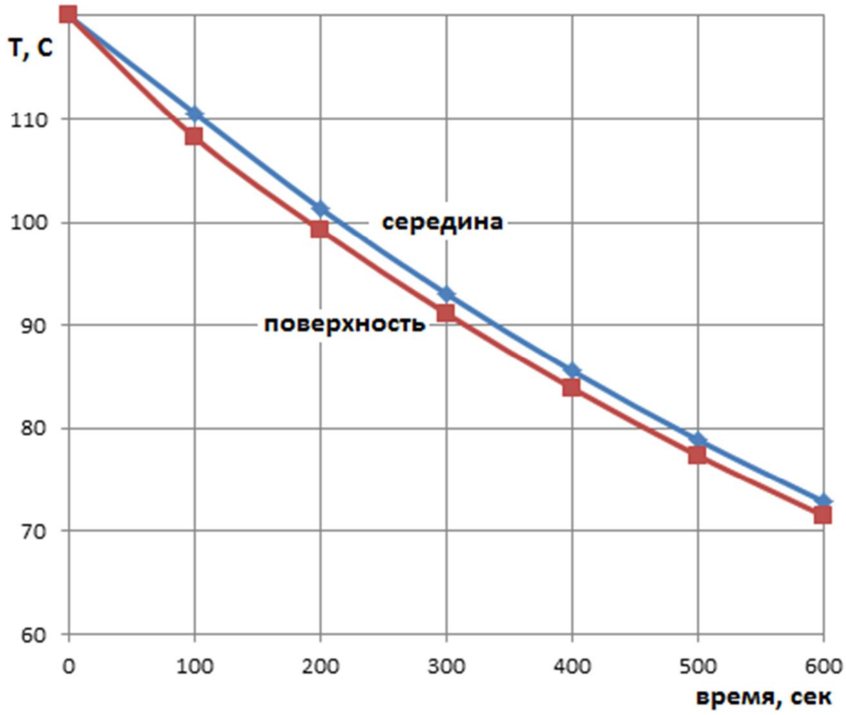


Рис. 9. Динамика изменения температуры на поверхности и в центре пластины

Задание 2. По данным таблицы постройте эпюры температур по полутолщине пластины в разные моменты времени с интервалом 100 сек.

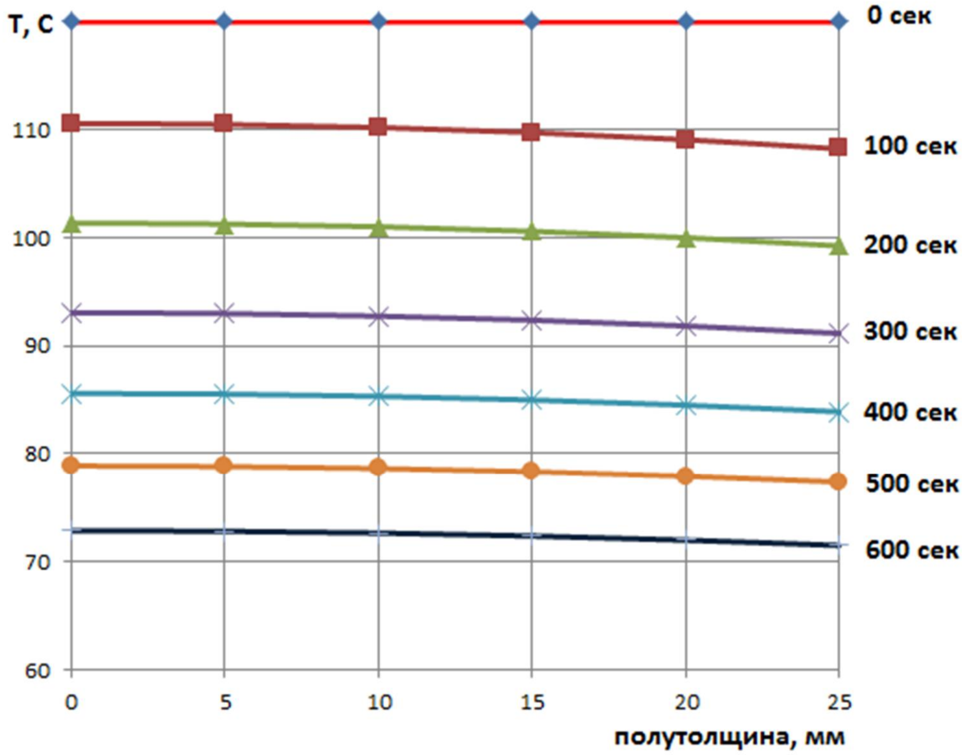


Рис. 10. Эпюра температур по толщине пластины для разных значений времени

Задание 3. Смоделируйте поведение какого-либо теплоизоляционного материала, например пенопласта, при тех же условиях.