

Механика деформируемого твердого тела (сокращенный вариант)

Оглавление

1. Деформации и напряжения	2
1.1 Понятие деформации	2
1.2. Понятие напряжения	3
2. Теория напряженного и деформированного состояния	5
2.1. Напряженное состояние в точке	5
2.2. Главные площадки и главные напряжения	7
2.3. Линейное напряженное состояние	9
2.4. Плоское напряженное состояние	10
2.4.1. Определение напряжений по наклонным плоскостям (прямая задача)	10
2.4.1.1. Решение аналитическим способом	10
2.4.1.2. Графическое решение прямой задачи плоского напряженного состояния с помощью круга Мора	11
2.4.2. Определение главных напряжений (обратная задача)	12
2.4.2.1. Решение графическим способом	12
2.4.2.2. Решение обратной задачи аналитическим способом	13
2.5. Объемное напряженное состояние. Обобщенный закон Гука	14
3. Теории прочности	15
3.1. Назначение теорий прочности	15
3.2. Классические теории прочности	16
3.2.1. Теория наибольших нормальных напряжений (I ТП)	16
3.2.2. Теория наибольших линейных деформаций. (II ТП)	17
3.2.3. Теория наибольших касательных напряжений. (III ТП)	17
3.2.4. Энергетическая теория прочности (IV ТП)	18
3.3. Расчетные формулы для одного случая плоского напряженного состояния по различным теориям прочности .	18
3.4. Сопротивление разрушению. Отрыв и срез. Выбор теории прочности	19
4. Расчет на прочность по несущей способности (предельному состоянию).	21
4.1. Модели поведения материала	21
4.2. Сущность расчета по несущей способности.	22
4.3. Резервы сечения	23
4.3.1. Резервы сечения бруса, работающего на растяжение-сжатие	23
4.3.2. Резервы сечения систем, работающих на кручение	23
4.3.2. Резервы сечения систем, работающих на изгиб	25
4.4. Резервы несущей способности статически неопределимых систем	26
4.4.1. Резервы систем, работающих на растяжение-сжатие	26
4.4.2. Резервы бруса, работающего на кручение	27
4.4.3. Резервы систем, работающих на изгиб	29
Метод выровненных эпюр	29

1. Деформации и напряжения

1.1 Понятие деформации

В зависимости от контекста есть два понимания деформации: деформация, как состояние всего твердого тела, и деформация, как количественная величина, характеризующая состояние одной точки тела. О какой из двух деформаций идет речь, нужно определить по контексту.

Деформацией твердого тела называется переход под действием внешних нагрузок из одного (недеформированного) состояния в другое, связанное с изменением его первоначальных **размеров** и **формы**. В этом контексте можно говорить о видах деформации: изгиб, сжатие, сдвиг, кручение, внецентровое растяжение и пр.

Деформация, как количественная величина, характеризующая состояние одной точки тела, имеет числовое значение и может быть измерена или рассчитана. В каждой точке твердого тела она может иметь свое, отличное от соседних точек, значение. Поэтому, наиболее удобным способом отображения деформации в объеме всего тела является задание функции деформации по трем пространственным координатам (x, y, z).

Рассмотрим бесконечно малую площадь dF в некотором сечении бруса F (рис. 1.1).

В результате деформации всего бруса происходит деформация этого элемента, при которой изменяется взаимное расположение отдельных точек, образующих этот элемент. Например, произвольные три точки A, B, C сместятся и займут, соответственно, положения A_1, B_1, C_1 .

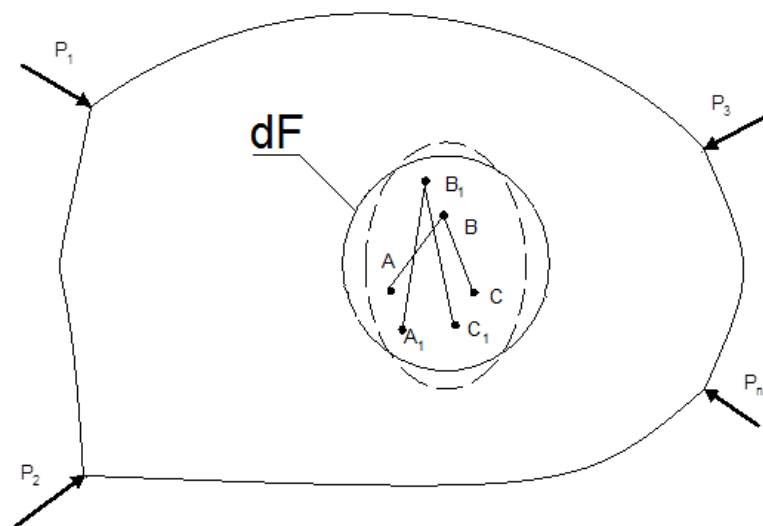


Рис. 1.1. Изменение взаимного положения точек бесконечно малой площадки dF

Перемещения точек A, B и C приводят к изменениям двух типов.

Во первых, расстояние между двумя любыми точками, например A и B , изменяется - длина отрезка AB увеличивается или уменьшается. Относительное изменение длины отрезка AB определяет **линейную** деформацию бесконечно малого элемента dF в направлении линии AB :

$$\varepsilon = \lim_{A \rightarrow B} \frac{|A'B'| - |AB|}{|AB|} \quad (1.1)$$

Относительное изменение длины отрезка AB рассчитывается в пределе уменьшения площади dF до размера точки, т.е. когда все точки A, B, C и др., образующие площадку стремятся в одну точку. Таким образом, линейная деформация – это величина, относящаяся к бесконечно малому отрезку. Практически можно считать, что в каждой точке тела возникает своя относительная деформация, изменяющаяся вдоль координат X, Y, Z .

Во вторых, из рисунка 1.1 видно, что точки A, B и C *сдвигаются* относительно друг друга. В результате меняются не только расстояния между ними, но и углы между отрезками, соединяющими эти точки. Это позволяет сделать вывод о том, что в направлении

В происходит угловая деформация бесконечно малого элемента dF . Так же, как и линейная деформация, она является безразмерной величиной, рассчитанной в пределе уменьшения площадки dF до размера одной точки:

$$\gamma = \lim_{\substack{A \rightarrow B \\ C \rightarrow B}} \frac{\widehat{A'C'B'} - \widehat{ABC}}{\widehat{ABC}} \quad (1.2)$$

Сдвиги точек сечения F (всех элементарных площадок dF , образующих сечение F) приводят к тому, что изменяется форма всего сечения. Изменения форм всех сечений тела приводит к изменению формы и самого твердого тела. Это позволяет считать, что угловая деформация отдельных точек связана с изменением формы всего тела и возникает тогда, когда точки тела сдвигаются по отношению друг к другу.

При линейной деформации изменяются расстояния между точками и в результате изменяются линейные размеры всего тела. Поэтому можно считать, что линейная деформация связана с изменением размеров тела и возникает тогда, когда точки тела приближаются или отдаляются друг от друга.

Относительная линейная и угловая деформации – величины безразмерные и обычно очень малы (составляют величину порядка 0,01 – 0,0001).

1.2. Понятие напряжения

Второй важнейшей величиной в механике деформируемого тела является **напряжение**. Это – силовая характеристика, и так же, как и деформация имеет отношение к каждой точке тела. Известно, что во время деформации в каждой точке тела действует внутренняя сила. Внутренняя сила возникает в результате деформации кристаллической решетки твердого тела и смещения атомов по отношению друг к другу. Чем сильнее внешнее воздействие, тем больше деформация решетки и тем больше внутренние силы. Таким образом, внутренние силы – это силы сопротивления тела, силы упругости решетки. Снятие внешней нагрузки приводит к тому, что внутренние силы совершают работу по восстановлению первоначальных размеров и формы твердого тела. В практических расчетах удобнее использовать отношение внутренней силы к площади той площадки, через поверхность которой сила приложена, которое называется напряжением (рис. 1.2):

$$\vec{p} = \frac{\Delta R}{\Delta F}, \quad (1.3)$$

где ΔR – внутренняя сила в некоторой точке тела;
 ΔF – площадь, по которой приложена эта сила.

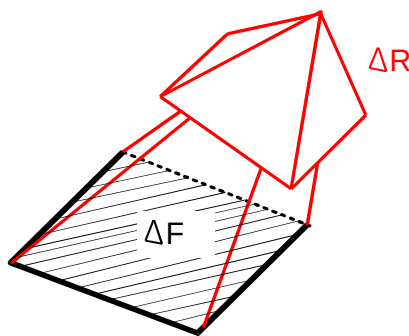


Рис. 1.2. Напряжение, действующее по площадке ΔF

Анализ размерностей величин в формуле 1.3 показывает, что единицей измерения напряжения является Н/м^2 или Па (паскаль). Если сравнить определение напряжения и давления, то, на первый взгляд, эти величины одинаковы: и здесь, и там, для расчета нужно силу разделить на площадь. Принципиальное отличие напряжения от давления состоит в том, что при расчете давления на площадь нужно разделить внешнюю силу, а при расчете

напряжения на площадь делят внутреннюю силу. Однако, некоторое сходство этих понятий позволяет провести аналогии и лучше понять, что представляет собой напряжение.

Проводя аналогию можно предположить, что напряжение – это внутреннее давление в каждой точке тела, противостоящее внешнему воздействию. Некоторый внутренний слой материала давит на соседний слой, и чем больше деформация, тем это давление выше. Напряжение – это силовая мера деформированного состояния. При определенной интенсивности внутренних сил напряжения возрастают до такой степени, что связи между атомами просто разрываются, начинается разрушение тела. Поэтому, чем выше напряжение, тем ближе рассматриваемое тело подошло к состоянию разрушения. В силу того, что напряжения изменяются от точки к точке тела, их удобно представлять в виде функции трех координат x, y, z .

Напряжение, рассчитанное по формуле 1.3, называется полным напряжением. В практических расчетах использовать полное напряжение не очень удобно, удобнее работать с его проекциями на оси. Учитывая, что напряжение – это векторная величина, можно получить его проекции так, как показано на рис. 1.3.

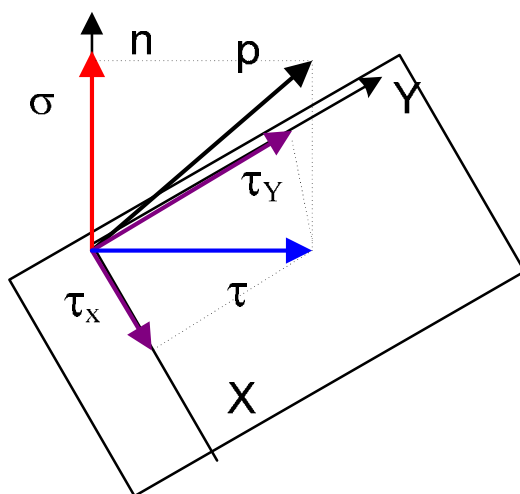


Рис. 1.3. Разложение полного напряжения на проекции

Проекция полного напряжения на нормаль (перпендикуляр) к площадке ΔF называется **нормальным напряжением** и обозначается **σ** . Составляющие полного напряжения, действующие непосредственно по площадке ΔF называются **касательными напряжениями** и обозначаются **τ** .

Нормальные напряжения возникают тогда, когда две параллельно расположенные площадки воздействуют друг на друга (см. рис. 1.4 а)). При этом, площадки либо приближаются друг к другу, либо отдаляются друг от друга. Нормальные напряжения действуют тогда, когда возникает линейная деформация и связаны с изменением линейных размеров тела.

Касательные напряжения возникают тогда, когда две площадки сдвигаются относительно друг друга (см. рис. 1.4 б)).

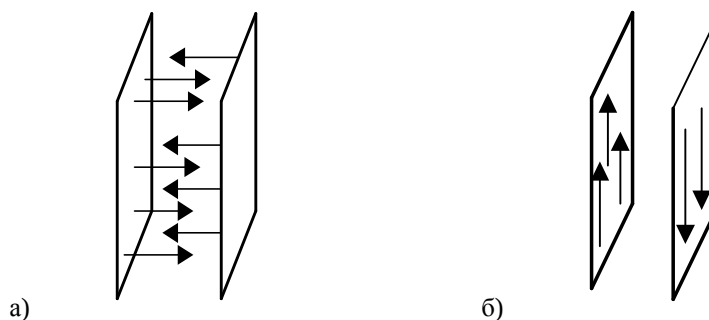


Рис. 1.4. Схема, показывающая действие напряжений: а) – нормальных; б) - касательных

Касательные напряжения возникают в результате появления угловой деформации и связаны с изменением формы тела.

Таким образом, можно заключить, всякое изменение размеров тела приведет к возникновению нормальных напряжений, изменение формы тела – возникновению касательных напряжений.

Для большинства материалов напряжения прямо пропорциональны деформации, т.е. зависимость между напряжением и деформацией линейна. Линейное уравнение на графике отображается в виде прямой линии, проходящей через точку 0. Саму же линейную зависимость, связывающую напряжение и деформацию называют законом Гука. Т.к. существует два вида напряжения и два вида деформации, то различают две формы закона Гука: для касательных и нормальных напряжений:

$$\sigma = E\varepsilon \quad (1.4)$$

$$\tau = G\gamma \quad (1.5)$$

Коэффициенты пропорциональности E и G , входящие в закон Гука, представляют собой константы для данного материала и называются, соответственно, модулем упругости и модулем сдвига.

2. Теория напряженного и деформированного состояния

2.1. Напряженное состояние в точке

Теория напряженного состояния ставит своей целью определить напряженное состояние исследуемого твердого тела. *Напряженное состояние деформируемого твердого тела* считается определенным, если определено напряженное состояние в каждой его точке. *Напряженное состояние в некоторой точке* считается определенным, если определены все напряжения по всем площадкам, образующим данную точку. При этом точка представляется как элементарный объем, ограниченный со всех сторон элементарными площадками (рис. 2.1).

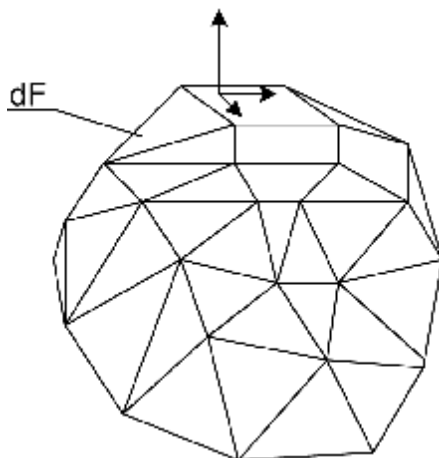


Рис. 2.1. Элементарный объем (точка), ограниченный элементарными площадками

Чтобы определить напряженное состояние всего твердого тела, нужно записать уравнения для каждого компонента напряжения, определяющего напряженное состояние по всем координатам x , y , z . Зная координату исследуемой точки, можно по уравнениям определить напряженное состояние именно в этой точке.

Любая точка - это бесконечно малый элемент, образованный бесконечным количеством площадок (рис. 2.1). Точка, как бесконечно малый объем не имеет ни размера, ни формы. Это позволяет определять форму точки произвольным образом. Наиболее простой и удобной в представлении формой является параллелепипед, образованный шестью площадками со сторонами dx , dy , dz . По каждой грани этого куба, как известно, действует три напряжения – три проекции полного напряжения: нормальное – перпендикулярно площадке, касательные –

по самой площадке. Тогда по трем видимым граням куба, обращенным к нам, будут действовать 9 напряжений, как показано на рис. 2.2.

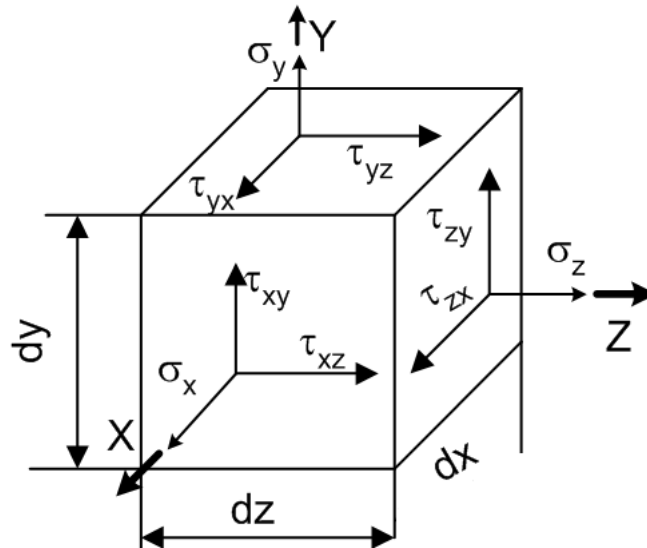


Рис. 2.2. Представление напряженного состояния в точке

Невидимые грани параллельны соответствующим видимым граням и отстоят от них на бесконечно малом расстоянии dx , dy , dz . Напряжения в твердом теле меняются вдоль координат x , y , z . При переходе от одной грани к другой – противоположной грани напряжения уже должны измениться. Но на бесконечно малом расстоянии dx , dy , dz напряжения изменяются на бесконечно малую величину $d\sigma$. При исследовании напряженного состояния в одной точке таким малым изменением напряжения пренебрегают и считают, что напряжения на противоположных гранях куба равны. В результате, напряженное состояние в точке определяется не 18, а только девятью параметрами – девятью напряжениями по трем граням кубика (см. рис. 2.2).

У каждого напряжения есть 2 индекса: индекс площадки и индекс направления (направления оси). В обозначении напряжения первым записывается индекс площадки. Например верхняя грань параллелепипеда обращена к оси Y , поэтому имеет индекс y . Второй индекс – индекс направления. Например нормальное напряжение по верхней грани направлено по оси Y , поэтому в качестве второго индекса имеет тоже y . Тогда его можно записать как σ_{yy} . Если напряжение имеет два одинаковых индекса, один из символов не записывают, и это напряжение обозначается как σ_y .

У касательных напряжений совпадений индексов быть не может и, поэтому для них записывают оба индекса. Например, напряжение τ_{yx} действует по площадке, обращенной к оси Y , поэтому первый индекс напряжения y . При этом, само напряжение направлено по оси X , поэтому второй его индекс – соответственно x .

Девять напряжений образуют **тензор напряжений**.

Тензор напряжений - это матрица, имеющая 3 строки и 3 столбца. Строки определяют направление. Первая строка определяет направление оси Z , вторая – оси Y , третья – оси X . Поэтому в строках тензора второй индекс любого напряжения – индекс оси. Столбцы определяют площадку: первый столбец – площадку обращенную к оси Z , второй – к оси Y , третий – к оси X . Поэтому у всех напряжений в первом столбце первый индекс Z , во втором – Y , в третьем – X .

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_Z & \tau_{YZ} & \tau_{XZ} \\ \tau_{ZY} & \sigma_Y & \tau_{XY} \\ \tau_{ZX} & \tau_{YX} & \sigma_X \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Важно помнить – в каждой точке тела задается свой тензор напряжений. Он определяет напряженное состояние не всего тела, а только напряженное состояние исследуемой точки твердого тела.

Чтобы определить напряженное состояние всего твердого тела, нужно для каждой его точки решить дифференциальные уравнения Навье.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + Z = 0 \\ \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y = 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + X = 0 \end{array} \right. \quad (2.2)$$

В уравнения Навье входят элементы тензора напряжений. Первое уравнение определяет направление Z, поэтому оно составлено по элементам первой строки тензора. Второе и третье определяют соответственно направления Y и X, поэтому они составлены по элементам второй и третьей строки тензора напряжений. Величины, обозначенные большими буквами X, Y и Z есть проекции объемных сил на оси X, Y и Z. В качестве объемных сил могут выступать сила тяжести, силы инерции или силы магнитного притяжения.

2.2. Главные площадки и главные напряжения

В практических расчетах возникает необходимость в более простом способе определения напряженного состояния. Для некоторого упрощения этой задачи используются понятия главных площадок и главных напряжений.

Как известно, точка не имеет ни размера, ни формы. Это позволяет выбрать элементарный куб произвольным способом, ориентируя его в пространстве. При повороте элементарного параллелепипеда вокруг любой координатной оси отдельные компоненты тензора должны измениться, но само напряженное состояние в целом остается неизменным. Напряженное состояние не зависит от нашей точки зрения, оно объективно. Меняется лишь наше видение напряженного состояния. Это означает, что можно поворачивать элементарный параллелепипед вокруг осей, выбирая наиболее удобное положение.

Если непрерывно поворачивать площадку, то рано или поздно можно добиться состояния, когда касательные напряжения на ней исчезнут. Это наступит тогда, когда полное напряжение перестанет давать проекцию на площадку. Площадки, по которым касательные напряжения равны нулю, называются *главными площадками* элементарного параллелепипеда. По главной площадке действует только нормальное напряжение. Нормальное напряжение, действующее по главной площадке, называется *главным напряжением*.

Если элементарный куб поворачивать сначала вокруг одной оси на некоторый угол α , потом вокруг второй оси на угол β и вокруг третьей оси на угол γ , то можно получить состояние, когда по всем граням действуют только главные напряжения. Для любого элемента такое состояние может быть только одно. В результате получится, что напряженное состояние можно определить не девятью параметрами (тензором), а только тремя главными напряжениями, как показано на рис. 2.3.

Главные напряжения являются по своей природе нормальными напряжениями, поэтому они обозначаются так, как обозначаются нормальные напряжения, но с индексами 1, 2, 3. Для определенности принято правило: первое главное напряжение - это наибольшее из них, третье – наименьшее, второе – среднее, т.е.:

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$$

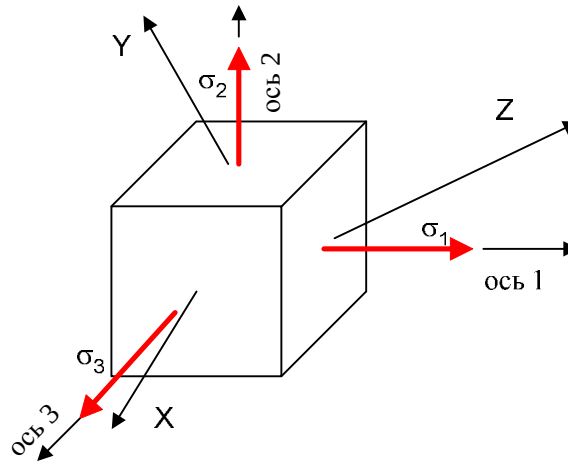


Рис. 2.3. Положение главных площадок

Это соотношение должно выполняться с учетом правила знаков: нормальное напряжение считается положительным, если растягивает элемент, и отрицательным, если сжимает.

Пример.

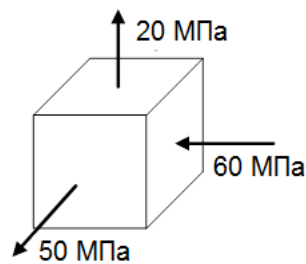


Рис. 2.4. Пример задания главных напряжений

Например, для случая, изображенного на рис. 2.4 можно записать:

$$\sigma_1 = 50 \text{ МПа}, \sigma_2 = 20 \text{ МПа}, \sigma_3 = -60 \text{ МПа}.$$

Анализируя напряженное состояние в точке можно заметить, что возможны три случая:

1) Два из трех главных напряжений равны нулю:

$$\text{либо } \sigma_1 = 0, \sigma_2 = 0, \sigma_3 < 0.$$

$$\text{либо } \sigma_1 > 0, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = 0.$$

Такое напряженное состояние называют **линейным**.

2) Одно из трех главных напряжений равно нулю:

$$\text{либо } \sigma_1 = 0, \sigma_2 < 0, \sigma_3 < 0.$$

$$\text{либо } \sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, \sigma_3 = 0.$$

$$\text{либо } \sigma_1 > 0, \sigma_2 = 0, \sigma_3 < 0.$$

Такое состояние называют **плоским**.

3) Все три напряжения не равны нулю. Такое напряженное состояние называют **объемным**.

Любая площадка, которая не является главной, называется наклонной. Она наклонена на некоторый угол α по отношению к главной площадке. При решении практических задач возможны два случая:

1) известны напряжения по главным площадкам, нужно определить напряжения по наклонным, расположенным под углом α к главным. Такую задачу для определенности называют **прямой задачей теории напряженного состояния**.

2) известны напряжения по наклонным площадкам, требуется определить главные напряжения. Эту задачу называют **обратной задачей теории напряженного состояния**.

2.3. Линейное напряженное состояние

Имеется единственное главное напряжение, оно известно, например σ_1 . Нужно определить нормальное и касательное напряжения, действующие по площадке, расположенной под углом α к главной площадке. Такой случай имеет место при осевом растяжении или сжатии. В поперечном сечении стержня при растяжении-сжатии действуют только нормальные напряжения. Поэтому любая площадка, расположенная в поперечном сечении будет являться главной. Тогда нормальное напряжение в поперечном сечении будет считаться главным напряжением, причем единственным главным.

Определим напряжения в наклонных сечениях бруса.

Обозначим α угол между наклонным сечением F_z и поперечным сечением F_1 (рис. 2.5).

Угол α принято считать **положительным**, когда поперечное сечение для совмещения с наклонным сечением надо повернуть на этот угол **против часовой стрелки**.

Рассмотрим элементарный параллелепипед, выбранный так, чтобы его нижняя грань совпадала бы с плоскостью поперечного сечения F_1 (рис. 2.5). При этом, если поперечное сечение F_1 повернуть против часовой стрелки на угол α , то оно займет положение F_z , а нижняя грань кубика окажется в сечении F_z .

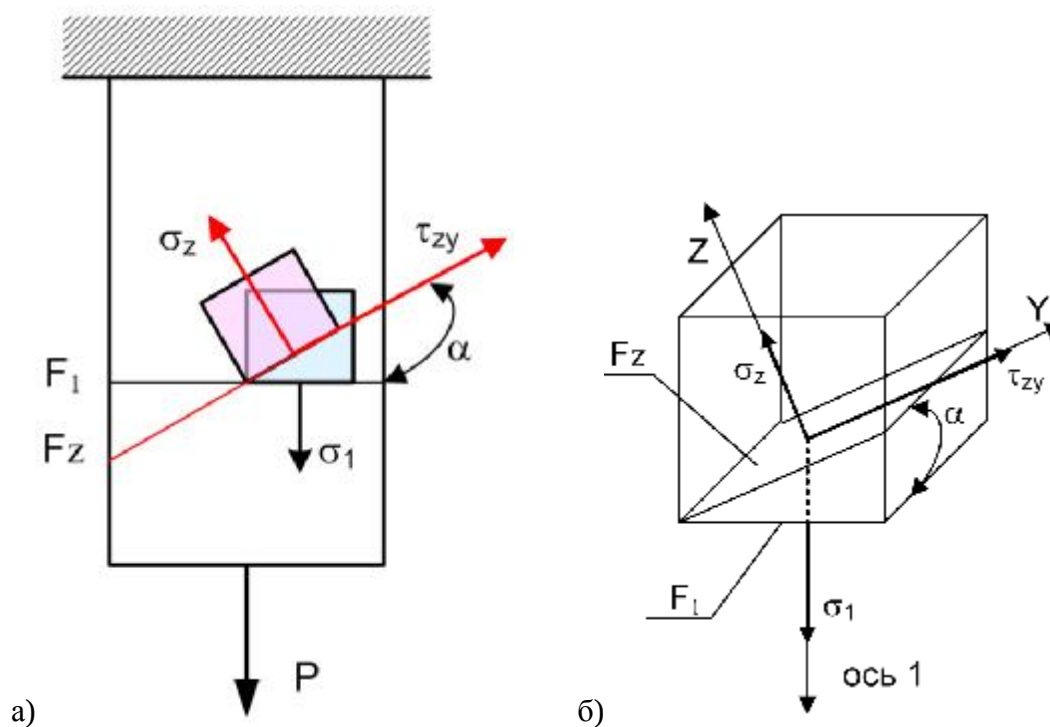


Рис. 2.5. Расположение главной и наклонной площадок при осевом растяжении

F_z - площадь наклонного сечения, равна $F_1/\cos \alpha$, где F_1 - площадь поперечного сечения бруса. Внутренняя сила, действующая в поперечном сечении - $\sigma_1 \cdot F_1$. Внутренняя сила, действующая в наклонном сечении в направлении оси Z - $\sigma_z \cdot F_z$, в направлении оси Y - $\tau_{zy} \cdot F_z$.

Рассмотрим элементарный параллелепипед подробнее (рис. 2.5 б)). Составим уравнения равновесия.

$$\begin{aligned} \sum P_z &= \sigma_z \cdot F_z - \sigma_1 \cdot F_1 \cdot \cos \alpha = \sigma_z \cdot F_z - \sigma_1 \cdot F_z \cdot \cos^2 \alpha = 0 \\ \sum P_y &= \tau_{zy} \cdot F_z - \sigma_1 \cdot F_1 \cdot \sin \alpha = \tau_{zy} \cdot F_z - \sigma_1 \cdot F_z \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 0 \end{aligned}$$

Напряжения по площадке, обращенной к оси Z можно вычислить по этим формулам, переписав их так, как показано в формулах 2.4.

$$\begin{aligned}\sigma_z &= \sigma_1 \cos^2 \alpha \\ \tau_{zy} &= \frac{\sigma_1}{2} \sin 2\alpha\end{aligned}\quad 2.4.$$

Нормальное напряжение считается положительным при растяжении и отрицательным при сжатии. Касательное напряжение положительно, если изображающий его вектор стремится вращать тело относительно любой точки C, лежащей на внутренней нормали к сечению, по часовой стрелке. На рис.2.5 напряжения σ_z и τ_{zy} положительные.

Из формулы 2.4 следует, что нормальные напряжения σ_z имеют значения от σ_1 (при $\alpha = 0$) до нуля (при $\alpha = 90^\circ$).

Таким образом, наибольшие (по абсолютной величине) нормальные напряжения возникают на главной площадке. Значит, главные напряжения есть экстремальные (максимальные или минимальные) напряжения.

Из формулы 2.4 следует, что касательные напряжения имеют значения от $\sigma_1 / 2$ (при $\alpha = 45^\circ$) до 0 (при $\alpha = 0^\circ$).

Значение τ_α равно нулю при $\alpha = 0$ и 90° (т.е. на главных площадках).

Касательные напряжения максимальны на площадках, расположенных под углом 45 градусов к главным.

Те же выводы можно сделать для любой деформации, при которой возникает линейное напряженное состояние, например при чистом изгибе или внецентровом растяжении-сжатии.

Вычислим напряжения по площадке, которая расположена под углом 90 градусов к данной наклонной площадке. например по площадке Y нормальное напряжение можно вычислить по формуле:

$$\sigma_Y = \sigma_1 \cdot \cos(\alpha + 90^\circ) = \sigma_1 \cdot \sin \alpha$$

Касательные напряжения можно рассчитать аналогично:

$$\tau_{yz} = \frac{\sigma_1}{2} \sin 2(\alpha + 90^\circ) = \frac{\sigma_1}{2} \sin(2\alpha + 180^\circ) = -\frac{\sigma_1}{2} \sin 2\alpha = -\tau_{zy}$$

или:

$$\tau_{yz} = -\tau_{zy} \quad (2.5)$$

Это формула является математической формулировкой закона парности касательных напряжений:

Касательные напряжения на взаимноперпендикулярных площадках равны по величине, но противоположны по направлению.

Формулы 2.4 дают решение прямой задачи теории напряженного состояния. Но с помощью этих же формул можно решить и обратную задачу, нужно лишь выразить из них главное напряжение.

2.4. Плоское напряженное состояние

2.4.1. Определение напряжений по наклонным плоскостям (прямая задача)

2.4.1.1. Решение аналитическим способом

Задача решается аналогично задаче определения напряжений по наклонным площадкам при линейном напряженном состоянии. Выделим из твердого тела тремя главными площадками элементарный параллелепипед. Пусть по верхней-нижней и боковым его граням действуют главные напряжения $\sigma_1 > 0$ и $\sigma_2 > 0$, а по передней и задней площадкам напряжений нет, т.е. $\sigma_3 = 0$.

Найдем напряжения по наклонной площадке Z, расположенной под углом α к главной площадке 1.

Обозначим площадь наклонной грани F_z .

Тогда левая грань имеет площадь $F_z \cos \alpha$, а нижняя $F_z \sin \alpha$.

Полное напряжение на наклонной площадке разложим на нормальное σ_z и касательное τ_{zy} .

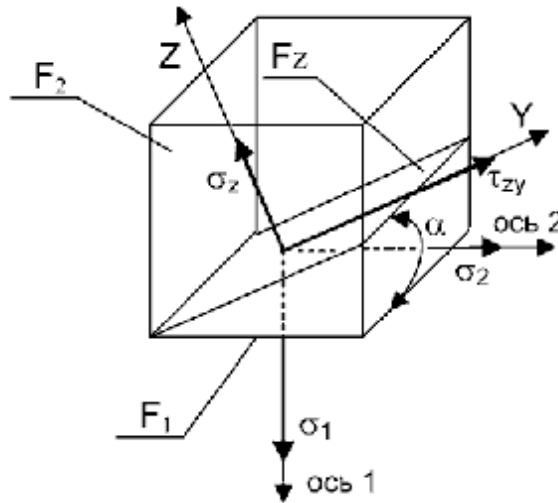


Рис. 2.6. Плоское напряженное состояние

Составим уравнения равновесия выделенной призмы:

Таких уравнений можно составить два: суммы проекций на оси Z и Y.

Первое уравнение: $\sum P_z = 0$,

откуда:

$$\begin{aligned} \sum P_z &= s_z F_z - s_1 \cdot F_z \cdot \cos a \cos a - s_2 \cdot F_z \cdot \sin a \sin a = 0 \\ s_z &= s_1 \cdot \cos^2 a + s_2 \cdot \sin^2 a \end{aligned} \quad (2.6)$$

Составим второе уравнение:

$$\sum P_y = t_{zy} F_z - s_1 \cdot F_z \cdot \cos a \cdot \sin a + s_2 \cdot F_z \cdot \sin a \cdot \cos a = 0$$

откуда:

$$t_{zy} = \frac{s_1 - s_2}{2} \sin 2a \quad (2.7)$$

Формулы 2.7 и 2.6 дают решение прямой задачи теории напряженного состояния.

Проанализируем полученные формулы. Найдем максимальное и минимальное нормальные напряжения. При значении угла, равного 0 град нормальное напряжение по наклонной площадке станет равным первому главному напряжению. При значении угла 90 град – второму главному напряжению.

Отсюда видно, что условие экстремума нормальных напряжений совпадает с условием отсутствия касательных напряжений, т.е. главные напряжения – это экстремальные нормальные напряжения.

Далее, из 2.7 определяем, что касательные напряжения максимальны при:

$\sin 2\alpha = 90 = 1$ и тогда $\alpha = 45^\circ$,

Касательные напряжения максимальны по площадке, расположенной под углом 45 град к главной и равны полуразности главных напряжений.

$$\tau_{zy\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad (2.8)$$

2.4.1.2. Графическое решение прямой задачи плоского напряженного состояния с помощью круга Мора

Решение той же задачи графическим способом предложил Отто Мор путем

построения окружностей, названных затем кругами Мора. Решаем прямую задачу. Известны 2 главных напряжения, третье равно нулю. Нужно определить нормальные и касательные напряжения по наклонным площадкам, расположенным под некоторым углом к главной площадке 1. Строим круг Мора.

В прямоугольной декартовой системе координат $\sigma - \tau$ (касательные напряжения откладываются по оси ординат, нормальные – по оси абсцисс) отложим в масштабе отрезки $OA = \sigma_1$ и $OB = \sigma_2$ (см. рис. 2.7).

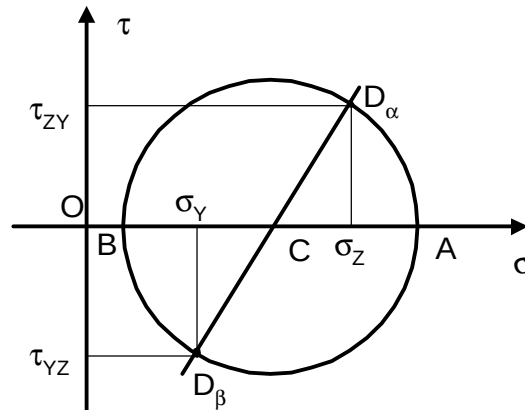


Рис. 2.7. Графическое представление плоского напряженного состояния

На полученном диаметре АВ построим круг с центром в точке С. Из точки С проведем луч под углом 2α к оси σ до пересечения с окружностью. Тогда координаты точки пересечения луча с окружностью D_α в принятом масштабе дадут нормальное и касательное напряжения на площадке Z, расположенной под углом α к первой главной площадке.

Напряжения на площадке Y, расположенной под углом $\beta = \alpha + 90^\circ$ к первой главной площадке найдем, продолжив луч CD_α в противоположном направлении. Тогда координаты D_β будут равны нормальному и касательному напряжениям по площадке Y. Заметим, что напряжения на взаимно-перпендикулярных площадках изображаются точками D_α, D_β , лежащими на противоположных концах одного диаметра.

2.4.2.Определение главных напряжений (обратная задача)

2.4.2.1.Решение графическим способом.

В практических расчетах на прочность чаще приходится решать не прямую, а обратную задачу:

по известным напряжениям на двух взаимно-перпендикулярных площадках нужно определить главные напряжения и главные площадки.

Пусть известны σ_z, τ_{zy} , и σ_y, τ_{yz} , действующие по двум взаимно перпендикулярным площадкам Fz и Fy. Найдем главные площадки и главные напряжения σ_1 и σ_2 .

Решим задачу графически с помощью круга Мора. Построим его в обратном порядке. В той же системе координат по известным координатам σ_z, τ_{zy} , и σ_y, τ_{yz} отложим точки D_α и D_β , изображающие напряжения на площадках под углами α и β (см рис 2.7). Так как эти точки лежат на противоположных концах одного диаметра, соединяя их, находим центр и строим окружность, получим круг Мора. Точки пересечения круга с осью нормальных напряжений дают искомые главные напряжения.

Эту же задачу можно решить чуть по-другому, если заданы напряжения только по одной наклонной площадке и угол ее наклона. Тогда нужно из известной точки опустить луч под двойным углом, найти точку центра круга и потом провести круг Мора.

2.4.2.2. Решение обратной задачи аналитическим способом

Аналитическое решение также вытекает из анализа напряженного состояния с помощью круга Мора (рис. 2.8).

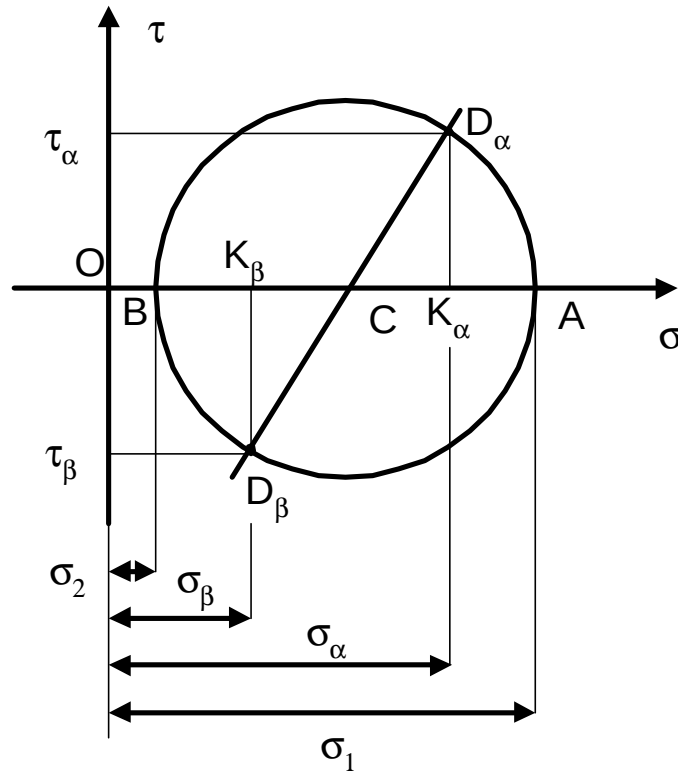


Рис. 2.8. Пояснения к решению обратной задачи

Из круга Мора следует, что $\sigma_1 = OA = OC + CA$; $\sigma_2 = OB = OC - CB$;

Расстояния $CA = CB = CD_\alpha$, т.к. все они являются радиусами круга.

Расстояние OC вычислим как среднее отрезков OK_α и OK_β :

$$OC = \frac{OK_\alpha + OK_\beta}{2} = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2}$$

Отрезок CD_α определяем по теореме Пифагора как гипотенузу прямоугольного треугольника:

$$CD_\alpha = \sqrt{K_\alpha D_\alpha^2 + CK_\alpha^2}, \quad K_\alpha D_\alpha = \tau_{zy}$$

Отрезок CK_α определяем как половину отрезка $K_\alpha K_\beta$:

$$CK_\alpha = \frac{OK_\alpha - OK_\beta}{2} = \frac{\sigma_z - \sigma_y}{2}$$

Полученные значения возвращаем в формулу расчета радиуса круга:

$$CD_\alpha = \sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \sigma_y}{2}\right)^2 - \tau_{zy}^2}$$

После подстановки в исходную формулу получим:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \sigma_y}{2}\right)^2 - \tau_{zy}^2} \quad (2.9)$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \sigma_y}{2}\right)^2 - \tau_{zy}^2} \quad (2.10)$$

Формулы получены для случая, когда оба главных напряжения – положительны. Третье напряжение равно нулю. Таким же образом, можно получить формулы для других случаев плоского напряженного состояния.

В случае, когда второе главное напряжение равно нулю, первое – положительно (растягивающее), а третье – отрицательно (сжимающее), можно переписать полученные формулы 2.9 и 2.10, заменяя второе напряжение на третье. Эти две формулы отличаются только знаком, стоящим перед корнем, поэтому их можно объединить:

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_z - \sigma_y)^2 - 4\tau_{zy}^2} \quad (2.11)$$

При вычислении первого напряжения в формуле используется знак плюс, при вычислении третьего – знак минус.

2.5. Объемное напряженное состояние. Обобщенный закон Гука

При объемном напряженном состоянии возникает три главных напряжения. На трех главных напряжениях можно построить три круга Мора.

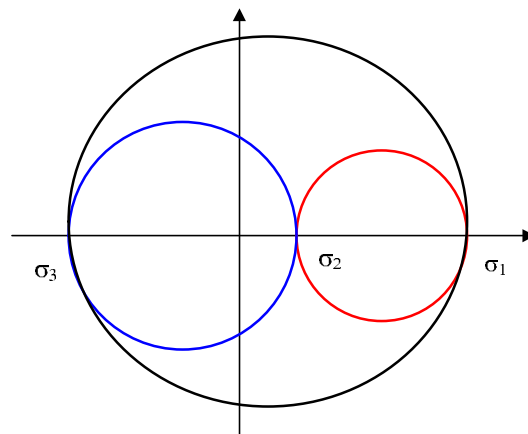


Рис. 2.9. Объемное напряженное состояние.

Круг, построенный на первом и третьем напряжениях, является самым большим. Этот круг называют главным кругом Мора.

Любая площадка в элементарном параллелепипеде наклонена ко всем трем главным площадкам на некоторые углы α , β и γ . Откладывая лучи под этими углами на первом, втором и третьем кругах Мора, можно определить все три нормальных и шесть касательных напряжений.

Если известны напряжения, можно определить относительные деформации. При линейном напряженном состоянии это можно было сделать с помощью закона Гука и коэффициента Пуассона. При объемном напряженном состоянии, очевидно, деформации должны рассчитываться через все три главных напряжения. Зависимость между всеми тремя главными напряжениями и деформациями называется обобщенным законом Гука.

Рассмотрим вывод этой формулы для напряженного состояния, заданного главными напряжениями σ_1 , σ_2 , σ_3 .

Деформации в направлении главных напряжений называются главными деформациями, обозначаются ϵ_1 , ϵ_2 , ϵ_3 .

Найдем деформацию ϵ_1 . Для этого в соответствии с принципом независимости действия сил представим объемное напряженное состояние как сумму трех линейных

напряженных состояний. Тогда деформация ϵ_1 найдется как сумма деформаций в направлении 1 для трех напряженных состояний :

$$\epsilon_1 = \epsilon_1' + \epsilon_1'' + \epsilon_1'''$$

От напряжения σ_1 деформацию можно вычислить через закон Гука при линейном напряженном состоянии:

$$\epsilon_1' = \frac{\sigma_1}{E}$$

От второго и третьего главных напряжений возникнут деформации, которые по отношению к деформации от первого напряжения будут поперечными и, значит, вычисляются через коэффициент Пуассона:

$$\epsilon_1'' = -\mu \epsilon_2' = -\mu \frac{\sigma_2}{E} \qquad \epsilon_1''' = -\mu \epsilon_3' = -\mu \frac{\sigma_3}{E}$$

Складывая три составляющие, получим:

$$\epsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]$$

Аналогично запишем формулы для второй и третьей главной деформации :

$$\epsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)] \qquad \epsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)]$$

Записав эти уравнения вместе, получаем систему. Система этих трех уравнений носит название обобщенного закона Гука или закона Гука для объемного напряженного состояния. Если известны главные напряжения, можно вычислить деформации и, наоборот, по известным деформациям можно определить главные напряжения.

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] \\ \epsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)] \\ \epsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)] \end{array} \right.$$

3. Теории прочности

3.1. Назначение теорий прочности

Теория напряженного состояния утверждает, что при решении практических задач, возможны 3 разных по сложности случая напряженного состояния:

- 1) линейное;
- 2) плоское;
- 3) объемное.

При линейном напряженном состоянии в опасной точке возникает только одно главное напряжение. Из опытов на растяжение можно определить допускаемое напряжение. Тогда легко составить условие прочности: единственное главное напряжение сравниваем с допускаемым:

$$\sigma_1 \leq [\sigma].$$

При плоском напряженном состоянии возникает два главных напряжения, а при объемном все три главных напряжения. Допускаемое напряжение как было одно, так и осталось. Возникает неопределенность: как записать условие прочности: как сравнить два или три главных напряжения с одним допускаемым. Понятно, что это невозможно, невозможно, без применения теорий прочности. Теории прочности позволяют связать два или главных напряжения в единую величину, которую называют эквивалентным напряжением. И в условии прочности сравнивается уже одно эквивалентное напряжение с одним допускаемым. **Важный вывод: при плоском и объемном напряженных состояниях провести расчет на прочность без применения теорий прочности невозможно.**

Разные теории прочности предлагают разные формулы расчета эквивалентного напряжения. Рассмотрим физический смысл эквивалентного напряжения. Сначала разберем понятие равноопасного состояния. При определении допускаемого напряжения вводилось понятие опасного состояния. Пусть имеется два напряженных состояния, т.е. две совершенно разные деформации. Можно ли сравнивать две разные деформации? Что общего можно найти у них? Общим является возможность или невозможность разрушения. Когда в обоих случаях наблюдается опасное состояние, то эти состояния равноопасны.

Если оба состояния далеки от опасного состояния, то равноопасными они будут тогда, когда при пропорциональном увеличении напряжений для обоих случаев приведет к опасному состоянию. Через понятие равноопасного состояния можно сравнивать разные напряженные состояния. При проведении расчетов с помощью теорий прочности в качестве стандартного состояния, с которым сравнивается любое другое рассчитываемое состояние принято выбирать линейное напряженное состояние, реализующееся при осевом растяжении-сжатии. Если рассчитываемое и стандартное напряженные состояния равноопасны, то единственное нормальное напряжение, возникающее при растяжении-сжатии, считают **эквивалентным** системе из двух или трех главных напряжений расчетного состояния. **Тогда эквивалентным напряжением данного сложного напряженного состояния называется нормальное напряжение в поперечном сечении растянутого образца, равноопасное с данным напряженным состоянием .**

Каждая теория прочности предлагает свою формулу расчета эквивалентного напряжения. Но не существует одной универсальной формулы, т.к. все теории прочности основаны на гипотезах – недоказуемых утверждениях. Проверить степень правильности той или иной теории прочности можно только экспериментально. Одни теории хороши при одних условиях, но совершенно не годятся в других. Другие имеют иные ограничения. Поэтому правильный выбор теории прочности решает очень многое. Ошибка в выборе может привести к совершенно неверному расчету. Рассмотрим наиболее известные, т.е. классические теории прочности и условия их применения.

3.2. Классические теории прочности

3.2.1. Теория наибольших нормальных напряжений (I ТП)

Первая теория прочности основывается на гипотезе о том, что причиной наступления опасного состояния являются **наибольшие нормальные напряжения**. В соответствии с этой теорией условие прочности можно представить следующим неравенством:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma] \quad (3.1)$$

Значит, согласно первой теории:

$$\sigma_{\text{экв}} = \begin{cases} \sigma_1, & |\sigma_1| > |\sigma_3| \\ \sigma_3, & |\sigma_1| < |\sigma_3| \end{cases} \quad (3.2)$$

Главный недостаток первой теории: она не учитывает два других главных напряжения. Эта теория противоречит результатам большинства опытов. Так при всестороннем сжатии кубика из любого материала он, не разрушаясь, выдерживает

напряжения, во много раз превышающие предел прочности, а по I теории должен был бы разрушаться при достижении $\sigma = \sigma_B$. Кроме того, она ни в одном случае не согласуется с результатами опытов для пластичных материалов. Поэтому первая теория имеет скорее историческую, чем практическую, ценность и на практике не применяется.

3.2.2. Теория наибольших линейных деформаций. (II ТП)

Вторая теория прочности основана на гипотезе о том, что причиной наступления опасного состояния являются линейные деформации, достигшие предельного значения. Условие прочности, отвечающее этой гипотезе, запишется так:

$$\epsilon_{\max} \leq [\epsilon] \quad (3.3)$$

Проанализировав обобщенный закон Гука, можно прийти к выводу, что максимальной деформацией будет первая главная деформация:

$$\epsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]$$

А для растянутого образца (линейное напряженное состояние):

$$[\epsilon] = \frac{[\sigma]}{E}$$

Подставляем обе формулы в условие 5.3 и сокращаем сразу в левой и правой частях неравенства модуль упругости материала. Тогда условие прочности (отсутствие опасного состояния) запишется так :

$$\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]$$

Выражение в левой части неравенства есть эквивалентное напряжение:

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{II}} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \quad (3.4)$$

Вторая теория прочности хорошо согласуется с результатами опытов для хрупких материалов, но не совпадает для пластичных. Это до сих пор наиболее распространенная теория для расчета деталей из хрупких материалов.

3.2.3. Теория наибольших касательных напряжений. (III ТП)

Третья теория прочности основана на гипотезе о том, что причиной наступления опасного состояния являются касательные напряжения, достигшие предельного значения. Условие прочности в соответствии с этим запишется так:

$$\tau_{\max} \leq [\tau] \quad (3.5)$$

Формулу, связывающую касательные напряжения по наклонным площадкам с главными напряжениями была получена в предыдущей теме 4, а именно при решении прямой задачи теории напряженного состояния. Объемное напряженное состояние показывается тремя кругами Мора. Наибольший из них – это главный круг Мора, построенный на первом и третьем главном напряжении. Поэтому из всех касательных напряжений наибольшим будет то, которое рассчитывается по этим напряжениям:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

При линейном напряженном состоянии наибольшее касательное напряжение возникает под углом 45 град к главной площадке и равно половине единственного главного

напряжения:

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{2}$$

Подставляя эти значения в условие 3.5 и умножая все неравенство на 2, записываем условие прочности:

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]$$

Тогда, эквивалентное напряжение по третьей теории прочности будет равно:

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_3 \quad (3.6)$$

Третья теория прочности хорошо согласуется с результатами опытов на пластичных материалах, одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию. Эта теория и ныне широко применяется при расчетах конструкций из пластичных материалов.

3.2.4. Энергетическая теория прочности (IV ТП)

Энергетическая, или четвертая теория прочности исходит из гипотезы о том, что причиной наступления опасного состояния является удельная потенциальная энергия изменения формы, достигающая предельного значения. Условие прочности, отвечающее этой гипотезе:

$$U_{\phi \text{ max}} < [U_{\phi}]. \quad (3.7)$$

Эквивалентное напряжение по четвертой теории прочности рассчитывается по формуле:

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{IV}} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \quad (3/8)$$

Четвертая теория прочности очень хорошо согласуется с результатами опытов для пластичных материалов, это, по-видимому, лучшая из теорий прочности для пластичных материалов.

3.3. Расчетные формулы для одного случая плоского напряженного состояния по различным теориям прочности

Рассмотрим часто встречающийся на практике случай плоского напряженного состояния, показанный на рисунке 3.1.

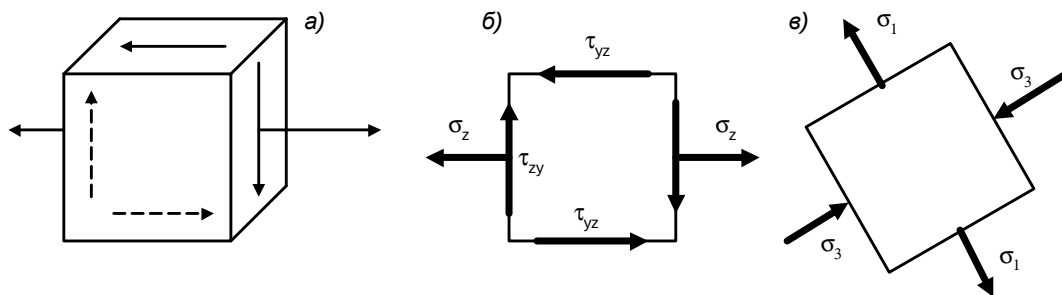


Рис. 3.1. Плоское напряженное состояние.

Этот случай возникает при плоском поперечном изгибе балок, а также при совместном действии изгиба и кручения, растяжения и кручения. На рис 3.1 показан этот случай. На рис. 3.1 а) показан элементарный параллелепипед, по граням которого действуют нормальные и касательные напряжения: σ_z , τ_{zy} , τ_{yz}

На рис. 3.1 б) показан тот же элемент, но в плоской форме. Такой способ изображения возможен потому, что по передней и задней граням нет никаких напряжений.

На рис. 3.1 в) показано это же напряженное состояние, но образованное главными площадками. Чтобы получить главные площадки, элемент б) нужно повернуть вокруг оси X до исчезновения касательных напряжений.

Главные напряжения: $\sigma_1 > 0, \sigma_2 = 0, \sigma_3 < 0$

Главные напряжения вычисляются из решения обратной задачи напряженного состояния по формуле 2.11:

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_z - \sigma_y)^2 + 4\tau_{zy}^2}$$

$\sigma_y = 0$, поэтому эта формула упрощается:

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_z}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_{zy}^2} \quad (3/9)$$

С учетом выражений для главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ получим формулы для эквивалентных напряжений по различным теориям прочности. Для этого формулу 3.9 подставим сначала в формулу 3.4, затем в 3.6 и потом в 3.8.

В результате для данного случая эквивалентное напряжение по второй теории прочности будет рассчитываться по формуле:

$$\sigma_{\text{экр}}^{\text{II}} = \sigma_z \frac{1-\mu}{2} + \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_{zy}^2} \frac{1+\mu}{2} \quad (3.10)$$

По третьей теории прочности:

$$\sigma_{\text{экр}}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma_z^2 - 4\tau_{zy}^2} \quad (3.11)$$

По четвертой теории прочности:

$$\sigma_{\text{экр}}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma_z^2 - 3\tau_{zy}^2} \quad (3.12)$$

3.4. Сопротивление разрушению. Отрыв и срез. Выбор теории прочности

В зависимости от того, как происходит разрушение, материалы разделяют на хрупкие и пластичные. Пластичные материалы разрушаются с образованием остаточных деформаций. Хрупкие материалы даже после разрушения не имеют пластических деформаций. Однако в наше время доказано, что можно создать такие условия нагружения, когда пластичный материал разрушается как хрупкий материал и наоборот, хрупкий материал как пластичный. Поэтому считается, что правильнее не материалы делить на хрупкие и пластичные, а механизмы разрушения – на хрупкое и пластичное.

Рассмотрим испытание материалов на растяжение. До предела упругости в образце развиваются только упругие линейные деформации, в полном соответствии с законом Гука. Модель растягиваемого стержня при этом удобно представить в виде набора продольных волокон. Каждое волокно растягивается независимо от соседнего. Стержень увеличивает свои продольные размеры за счет растяжения каждого отдельного волокна и становится уже за счет сужения каждого волокна.

Когда в образце начинаются пластические деформации, на поверхности появляются под углом 45 град линии Чернова. Известно, что 45 град – это угол наклона площадок, по которым максимальны касательные напряжения и, следовательно, угловые деформации. Таким образом, за пределом упругости материала основной вклад в удлинение образца вносят уже не линейные деформации и нормальные напряжения, а угловые деформации и касательные напряжения. За пределом упругости, модель стержня, показанная на рис. 2.3, становится неверной. Стержень продолжает удлиняться, но не за счет растяжения волокон, а за счет сдвигов площадок под углом 45 град к оси стержня (см рис. 3.2).

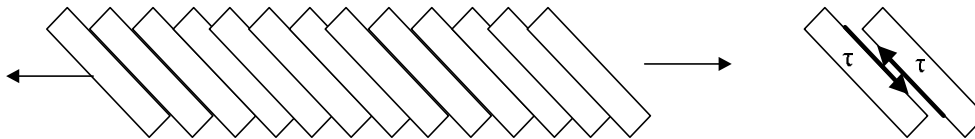


Рис. 3.2 Модель растяжения стержня при развитии пластических деформаций

Пластическая деформация развивается в результате сдвига площадок, т.е. в результате действия касательных напряжений.

При испытании на растяжение пластичного материала под углом 45 град к оси разрывается плоский образец. Это свидетельствует о том, что разрушение произошло от действия касательных напряжений. Подобный механизм разрушения называют **разрушением путем среза**. Несмотря на то, что образец растягивается, он будет не разорван, а срезан.

Совсем по-другому происходит разрушение при растяжении образца из хрупкого материала, например из чугуна. После разрушения разорванные края образца имеют крупнозернистую структуру, а плоскость разрыва перпендикулярна оси стержня (рис. 3.3).

Каждое волокно разрывается от нормальных напряжений. Поэтому такой механизм разрушения называют **разрушением путем отрыва**.

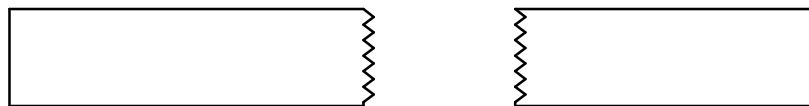


Рис. 3.3. Разрушение образца из хрупкого материала

При обычных условиях пластичные материалы разрушаются путем среза, а хрупкие – путем отрыва. Но можно создать условия, когда это правило нарушается. Например, если создать объемное напряженное состояние, когда все три главных напряжения являются растягивающими, разрушение будет обязательно происходить по хрупкому механизму, несмотря на то, что материал является пластичным.

Проведенный анализ позволяет сделать важный вывод:

При обычных условиях пластичные материалы разрушаются путем среза, т.е. от касательных напряжений, а хрупкие материалы – путем отрыва, т.е. от нормальных напряжений.

Теперь можно понять, почему третья теория прочности хорошо согласуется с результатами опытов для пластичных материалов: она принимает в качестве критерия разрушения касательные напряжения.

Вторая теория принимает в качестве критерия разрушения линейную деформацию, а та связана по закону Гука с нормальными напряжениями. Поэтому эта теория подходит для хрупких материалов.

Четвертая теория принимает за критерий разрушения потенциальную энергию изменения формы. Известно, что при деформации изменяются размеры и форма. Значит, потенциальную энергию деформации можно разделить на энергию изменения формы и энергию изменения размеров. При изменении размеров возникают нормальные напряжения, а при изменении формы – касательные. Следовательно, четвертая теория прочности – это теория касательных напряжений. Вот почему она хорошо согласуется с результатами опытов для пластичных материалов.

При выборе той или иной теории прочности нужно определить, что принимает в качестве критерия разрушения эта теория: если – нормальные напряжения или линейную деформацию, то ее можно применять для расчета хрупких материалов; если – касательные напряжения или угловую деформацию, то ее можно применять для расчета пластичных материалов.

4. Расчет на прочность по несущей способности (предельному состоянию)

4.1. Модели поведения материала

Поведение большинства материалов под нагрузкой является достаточно сложным и неформализуемым с помощью упрощенных моделей. Это значительно усложняет возможности расчета деталей машин, узлов механизмов и элементов инженерных сооружений и строительных конструкций. Однако, во многих случаях удается все же выполнить описание поведения материала по упрощенной схеме.

В механике деформируемого твердого тела применяются несколько моделей поведения материалов, графическое изображение которых показано на рис. 4.1.

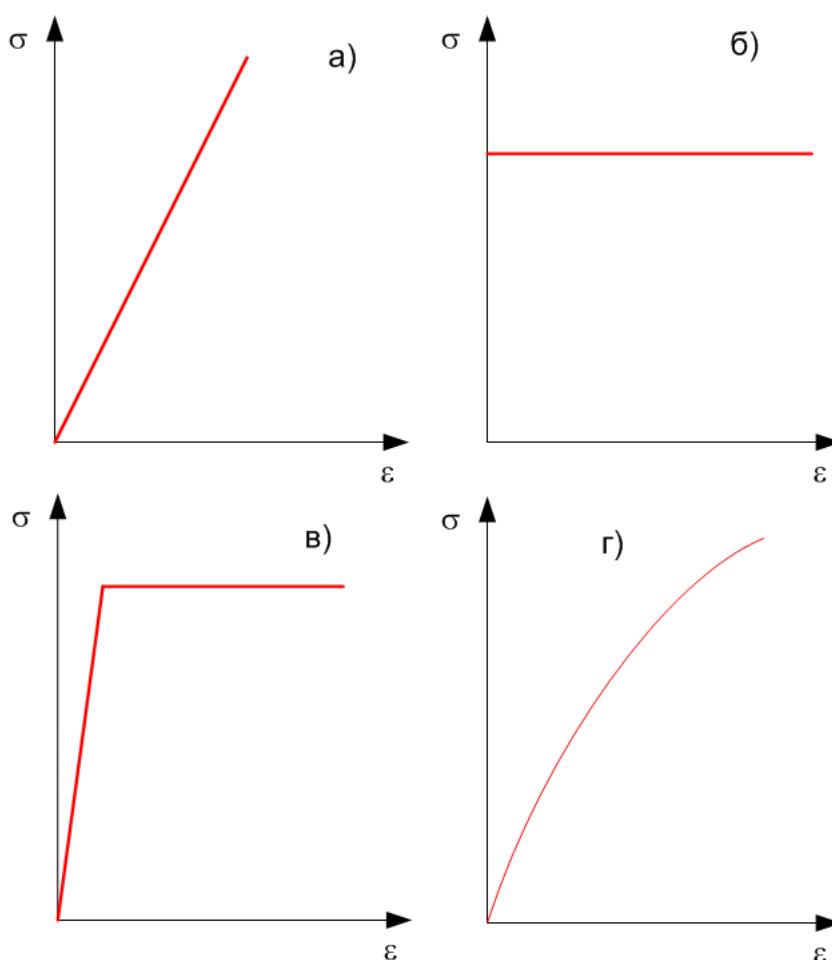


Рис. 4.1. Модели поведения материалов

На рис. 4.1 а) показана модель материала, поведение которого характеризуется идеальной упругостью. Во всем диапазоне нагрузок поведение материала подчиняется закону Гука. Эта модель лежит в основе сопротивления материалов. В этой науке считается, что за пределом упругости никакие расчеты не возможны – происходит разрушение конструкции.

На рис. 4.1 б) показана модель материала, поведение которого характеризуется идеальной пластичностью. Во всем диапазоне нагрузок отсутствует упругое сопротивление. Эта модель применяется при выполнении расчетов деталей, подвергающихся значительным деформациям при механической обработке – штамповке, прокатке, волочении и др.

На рис. 4.1 г) показана модель материала, поведение которого характеризуется нелинейной зависимостью напряжений от деформации.

На рис. 4.1 в) показана модель материала, поведение которого характеризуется сочетанием упругой и пластичной области. До предела текучести материал характеризуется идеальной упругостью, по достижению предела текучести начинается бесконечное течение, материал становится идеально пластичным.

4.2. Сущность расчета по несущей способности

Расчет на прочность в сопротивлении материалов проводится на основе модели идеальной упругости - расчет по допускаемому напряжению, выбирая в качестве него опасное напряжение, уменьшенное на величину коэффициента запаса прочности. За опасное напряжение для хрупких материалов принимается предел прочности материала, а для пластичных – предел текучести. Если расчетное напряжение хотя бы в одной точке бруса достигает опасного напряжения, считается, что произойдет разрушение.

Для хрупких материалов этот подход вполне оправдан. Если в любой точке напряжение достигнет предела прочности, то в ней произойдет местный отрыв, т.е. возникает трещина. Это действительно можно считать разрушением.

Для пластичных материалов опасным считается предел текучести, при достижении которого в материале начинаются пластические деформации. Если в опасной точке расчетные напряжения достигают предела текучести, то считают что произошло разрушение. Но пластические деформации в одной точке - это не трещина и, в принципе, в целом с деталью ничего опасного пока не произошло. Т.к. практически вся основная часть бруса находится в упругом состоянии, он вполне способен и дальше упруго сопротивляться действию внешней нагрузки.

Значит, традиционный расчет на прочность для пластичных материалов занижает действительно опасную внешнюю нагрузку или для заданной нагрузки завышает реальный запас прочности.

Таким образом, возникновение течения материала в одной опасной точке не означает потери несущей способности всего бруса. Чтобы более рационально использовать несущую способность конструкции из пластичного материала, нужно расчет по допускаемому напряжению заменить на расчет по несущей способности или как иногда его называют по предельному состоянию.

Теоретической основой расчета является упруго-пластичная модель материала в соответствии с идеализированной диаграммой Прандтля. Реальную диаграмму растяжения материала заменяют упрощенной диаграммой. Эта диаграмма состоит только из двух участков: участка упругого сопротивления, на котором поведение материала подчиняется закону Гука; и бесконечной площадки текучести - горизонтального участка, на котором в материале развиваются пластические деформации. (см. рис. 4.2).

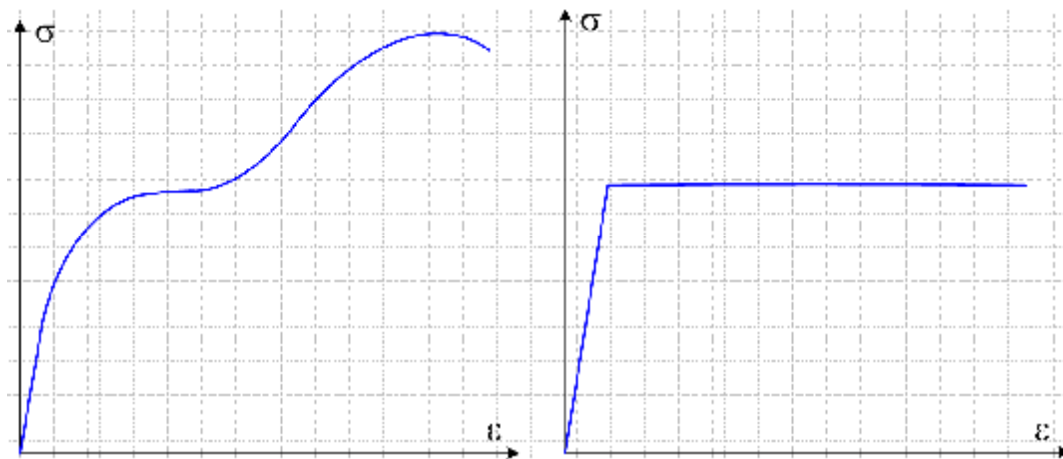


Рис. 4.2. Диаграмма растяжения пластичного материала и диаграмма Прандтля.

В соответствии с этой диаграммой в материале невозможны напряжения, большие, чем предел текучести. Поэтому даже если по достижению предела текучести продолжать увеличивать внешнюю нагрузку, то деформации растут, а напряжения остаются постоянными. При этом, напряжения могут расти в других точках бруса, где предел текучести не достигнут. Когда-нибудь и в этих точках напряжения достигнут предела текучести. Тогда и в них рост напряжений прекратится.

Внешнюю нагрузку можно увеличивать до тех пор, пока переход каких-либо точек в состояние пластической деформации не нарушит равновесия системы, т.е. пока для системы

соблюдается принцип кинематической неизменяемости.

Если в некотором сечении во всех его точках будет достигнут предел текучести, сечение превращается в пластический шарнир. Оно теряет способность упруго сопротивляться нагрузке. В статически определимых системах это означает исчерпание несущей способности всей конструкции в целом. В статически неопределимых системах возникновение одного пластического шарнира еще не означает потери несущей способности всей системы, т.к. эти системы имеют дополнительные резервы по числу степеней свободы, благодаря лишним связям. Возникновение пластического шарнира приводит к повышению на одну единицу числа степеней свободы. Но лишняя связь это компенсирует. Значит, можно увеличивать нагрузку до появления второго пластического шарнира. Чем больше лишних связей, тем больше резервов система имеет, и тем сильнее будет завышен запас прочности при применении традиционного расчета на прочность.

Следовательно, при проведении расчета по несущей способности нужно помнить, что имеется два вида резервов: резервы несущей способности сечения и резервы по числу степеней свободы для статически неопределимых систем.

4.3. Резервы сечения

Сечение имеет резервы в том случае, если напряжения в поперечном сечении распределены неравномерно, т.е. когда напряжения в разных точках сечения достигнут предела текучести не одновременно.

4.3.1. Резервы сечения бруса, работающего на растяжение-сжатие

При растяжении – сжатии в поперечном сечении стержня возникают нормальные напряжения, которые рассчитываются по формуле:

$$\sigma = \frac{N}{F}$$

Нормальные напряжения при растяжении-сжатии, равномерно распределены по ширине и высоте сечения. Значит, при увеличении нагрузки все точки сечения одновременно достигают предела текучести и резервов несущей способности при растяжении-сжатии нет.

4.3.2. Резервы сечения систем, работающих на кручение

При кручении в поперечном сечении стержня возникают касательные напряжения, которые рассчитываются по формуле:

$$\tau = \frac{M_z}{I_p} \cdot \rho$$

Эти напряжения, линейно распределены по полярной координате (высоте сечения) (см. рис. 4.3 а)).

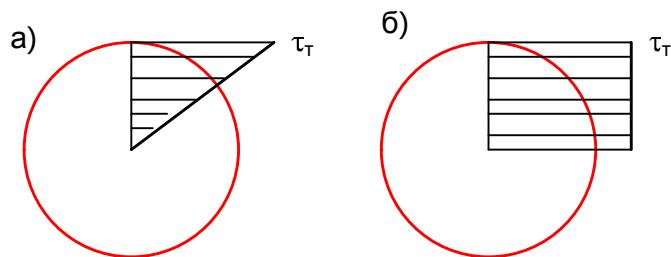


Рис. 4.3. Распределение напряжений в радиальном направлении при кручении

Неравномерность распределения напряжений по сечению говорит о том, что точки сечения не одновременно достигают предела текучести и сечение обладает резервами несущей способности. Первой достигает этого состояния точки, расположенные на поверхности круга. При дальнейшем увеличении нагрузки (внешнего крутящего момента)

рост напряжений происходит в более удаленных от поверхности точках. В какой-то момент во всех точках сечения напряжения достигают предела текучести. Несущая способность сечения исчерпана. При этом, эпюра напряжений в сечении выравнивается (см рис. 4.3. б)).

Теперь во всех точках сечения напряжения равны пределу текучести. Выведем формулу расчета по несущей способности.

Выделим малый элемент в виде узкого кольца шириной $d\rho$ на произвольном расстоянии ρ от центра (см. рис. 4.4). Его площадь равна $dF = 2\pi\rho d\rho$. По этой площадке, как и по любой другой, действуют напряжения τ_T . Внутренняя сила от этого напряжения будет равна $\tau_T dF$. А момент этой силы относительно центра равна $\tau_T dF \rho$. Чтобы вычислить суммарный внутренний момент, нужно сложить все моменты по всем площадкам, образующим площадь. Для этого нужно проинтегрировать элементарный момент по всей площади.

$$M_T = \int_F \tau_T \rho dF = \int_0^R \tau_T 2\pi \rho^2 d\rho = \tau_T 2\pi \frac{R^3}{3} = \frac{\pi d^3}{12} \tau_T$$

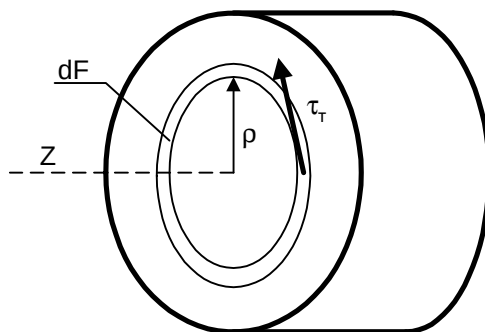


Рис. 4.4. Пояснения к выводу формулы момента течения

Перепишем эту формулу в более привычной форме:

$$\tau_T = \frac{M_T}{\frac{\pi d^3}{12}} = \frac{M_T}{W_{пл}}$$

Тогда можно составить условие прочности по несущей способности:

$$\tau_{max} = \frac{M_{z max}}{W_{пл}} \leq [\tau]$$

Оно похоже на обычное условие прочности по касательным напряжениям. В нем вместо полярного момента сопротивления используется другая величина. Ее называют пластическим моментом сопротивления при кручении. Она равна:

$$W_{пл} = \frac{\pi d^3}{12} \quad (4.1)$$

Из этого условия прочности можно вычислить диаметр вала:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{12 M_{z max}}{\pi [\tau]}} \quad (4.2)$$

Если сравнить эту формулу с формулой диаметра, полученную при расчете на прочность по допускаемым напряжениям, можно заметить, что она дает чуть меньший диаметр (коэффициент 12 вместо 16). Причем все это теоретически обоснованно, без нарушения условия прочности. Таким образом, расчет по несущей способности позволяет снизить диаметр вала, обеспечивая при этом достаточную прочность.

4.3.2. Резервы сечения систем, работающих на изгиб

При изгибе, как известно, в поперечном сечении возникают нормальные напряжения, которые можно вычислить по формуле:

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} \cdot y$$

Напряжения неравномерно распределены по высоте сечения. Они меняются по линейному закону (эпюра по координате y – прямая линия). Напряжения равны нулю на нейтральной оси и максимальны в крайних волокнах. При расчете на прочность по допускаемым напряжениям достижение предела текучести в опасном (верхнем или нижнем) волокне сечения приравнивается к разрушению. Поэтому условие прочности записывается для наиболее удаленного от оси волокна:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{x \max}}{W_x} \leq [\sigma]$$

Но, как было уже замечено, достижение предела текучести в одной точке сечения не приводит к потере несущей способности. Внешнюю нагрузку можно наращивать до тех пор, пока сечение не превратится в пластический шарнир. При этом напряжения во всех точках станут одинаковыми и равны пределу текучести (рис. 4.5 б)).

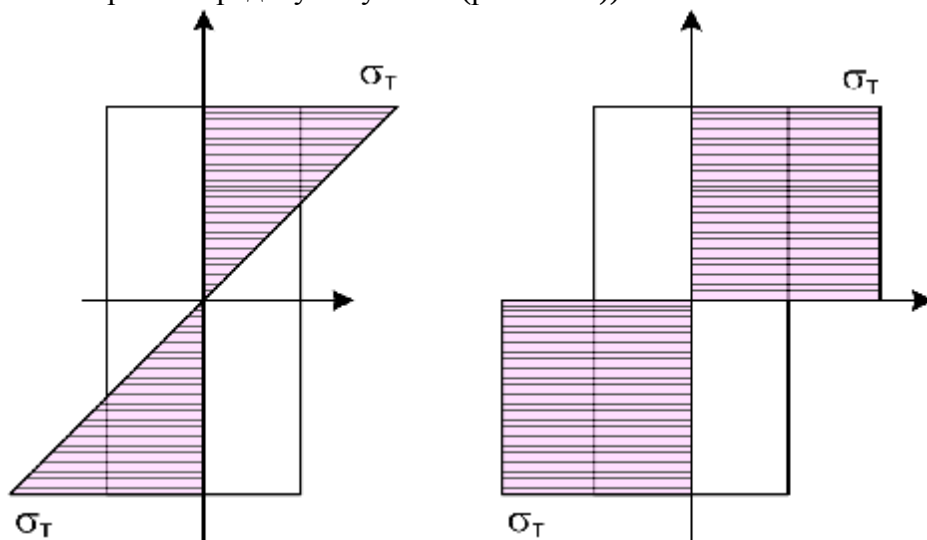


Рис. 4.5. Эпюры напряжений при изгибе при расчете по допускаемым напряжениям и несущей способности

Выведем формулу расчета на прочность по несущей способности.

Рассмотрим сечение балки, в котором выделим элемент в виде узкой полоски шириной dy на некотором произвольном расстоянии y (рис. 4.6).

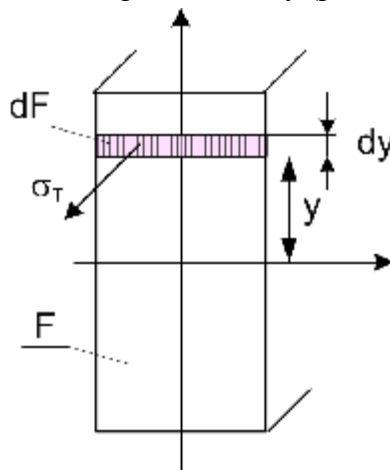


Рис. 4.6. Пояснения к выводу формулы M_t при изгибе

Продольная сила, действующая по этой площадке будет равна $\sigma_T dF$. Момент этой силы относительно оси X будет равен:

$$\sigma_T dF y.$$

Суммарный внутренний момент верхней части сечения относительно оси X вычисляется как интеграл по площади верхней части сечения:

$$\int_{F_{\text{верх}}} \sigma_T y dF$$

Таким же образом можно рассчитать суммарный момент нижней части и путем сложения двух интегралов найти суммарный внутренний момент:

$$M_T = \int_{F_{\text{верх}}} \sigma_T y dF + \int_{F_{\text{ниж}}} \sigma_T y dF = \sigma_T (S_X^{\text{верх}} + S_X^{\text{ниж}}) = \sigma_T W_{\text{пл}}$$

Отсюда можно составить условие прочности:

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M_{X \text{ max}}}{W_{\text{пл}}} \leq [\sigma]$$

В знаменателе находится величина, которую называют пластическим моментом сопротивления изгибу. Он вычисляется как сумма статических моментов верхней и нижней части:

$$W_{\text{пл}} = S_X^{\text{верх}} + S_X^{\text{ниж}} \quad (4.3)$$

Для сечений, симметричных относительно нейтральной оси, пластический момент сопротивления рассчитывается по формуле:

$$W_{\text{пл}} = 2 \cdot S_X \quad (4.4)$$

Сравним результаты расчетов на прочность по несущей способности и по допускаемым напряжениям для сечения в форме квадрата.

Высота верхней части равна половине общей высоты квадрата, а расстояние до центра тяжести – половина этой высоты, т.е. четверть общей высоты.

$$W_X^{\text{кв}} = \frac{bh^2}{6} = \frac{b^3}{6} \quad W_{\text{пл}}^{\text{кв}} = 2S_X = 2(b \frac{h}{2} \frac{h}{4}) = \frac{b^3}{4}$$

Для сравнения разделим пластический момент сопротивления на осевой:

$$\frac{W_{\text{пл}}}{W_X} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{6}} = \frac{6}{4} = 1.5$$

Пластический момент сопротивления для квадрата в полтора раза больше осевого. Значит, расчет по допускаемому напряжению по сравнению с расчетом по несущей способности в 1,5 раза завышает запас по прочности для сечения квадратной формы.

4.4. Резервы несущей способности статически неопределимых систем

4.4.1. Резервы систем, работающих на растяжение-сжатие

Рассмотрим расчет на прочность бруса, схема которого показана на рис. 4.7.

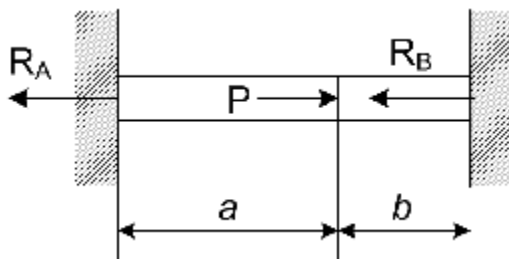


Рис. 4.7. Схема статически неопределимого бруса

Раскрывая статическую неопределимость находим опорные реакции. Далее можно рассчитать внутренние усилия на участках a и b :

$$N_a = R_A = \frac{Pb}{a+b}, \quad N_b = -R_B = -\frac{Pa}{a+b}$$

Пусть, например участок a длиннее участка b в 4 раза. Тогда усилие на участке b будет больше и расчет на прочность следует провести по этому участку. Выполним расчет по определению максимально безопасной внешней силы P . Из условия прочности по допускаемым напряжениям (традиционный расчет):

$$N_{\max} = [P] \frac{a}{a+b} = [P] \frac{4b}{5b} = [P] \frac{4}{5} \leq F[\sigma]$$

Определяем допускаемую силу:

$$[P] \leq 1,25 F[\sigma]$$

Теперь проведем расчет по несущей способности. Если напряжения в каждом сечении на участке b достигнут предела текучести, то участок перестанет упруго сопротивляться. Но участок a пока находится в упругом состоянии и поддерживает несущую способность всего стержня. Поэтому силу P можно увеличивать и дальше. Несущая способность будет исчерпана тогда, когда и на участке a в каждом сечении, в каждой его точке напряжения не достигнут предела текучести. В этот момент внутренние усилия на обоих участках выровняются и станут равны:

$$N_a = N_b = \sigma_T F$$

Это значит, что опорные реакции в обоих заделках тоже станут одинаковыми и равными в соответствии с методом сечений этим внутренним усилиям. Тогда из уравнения равновесия можно определить допускаемую силу P :

$$[P] = 2 R_A = 2 N_a = 2 F[\sigma]$$

Эта формула записана для допускаемой силы. Для этого предел текучести сразу поделили на коэффициент запаса прочности. Таким образом, мы теперь сможем сравнить результаты, полученные двумя способами расчета. Для этого, поделим силу, полученную расчетом по несущей способности на силу, полученную расчетом по допускаемым напряжениям:

Расчет показывает эффективность метода решения по несущей способности. Традиционный расчет на прочность необоснованно завышает запас по прочности в 1,6 раза.

$$\frac{[P]_{\text{н.с.}}}{[P]_{\text{д.н.}}} = \frac{2}{1,25} = 1,6$$

4.4.2. Резервы бруса, работающего на кручение

Для сравнения результатов проведем расчет на прочность системы, показанной на рис. 4.8.

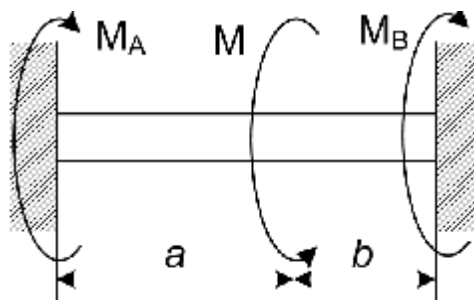


Рис. 4.8. Схема статически неопределимого вала

Раскроем статическую неопределимость. Найдем реакции на опорах — крутящие

моменты защемлений:

$$M_B = \frac{a}{a+b} M \quad M_A = \frac{b}{a+b} M$$

В соответствии с методом сечений внутренние крутящие моменты тогда будут равны:

$$M_b = \frac{a}{a+b} M \quad M_a = \frac{b}{a+b} M$$

Пусть длина участка a больше длины участка b в 4 раза. Тогда расчет на прочность по допускаемым напряжениям будет проведен именно по этому участку:

$$M_{Z \max} = M_b = \frac{4b}{5b} M = \frac{4}{5} M \leq W_p [\tau]$$

Отсюда можно определить допускаемый момент:

$$[M_1] \leq 125 W_p [\tau] = 125 [\tau] \frac{\pi d^3}{16}$$

Теперь проведем расчет по несущей способности. Если напряжения на поверхности вала в каждом сечении на участке b достигнут предела текучести, то это не будет означать потери несущей способности. Внутренние области каждого сечения пока находятся в упругом состоянии. Поэтому внешний момент можно увеличивать. Когда во всех точках всех сечений на участке b напряжения станут равны пределу текучести, участок потеряет способность упруго сопротивляться. Если бы вал был статически определим, то это означало бы потерю несущей способности всего вала. Но для статически неопределимого вала имеется дополнительный резерв, связанный с участком a . Он пока не потерял способности к сопротивлению и поэтому весь вал способен также упруго сопротивляться. Внешний момент можно увеличивать и дальше. Когда напряжения во всех точках второго участка станут равны пределу текучести, вал исчерпает несущую способность. В этот момент реакции в обеих заделках станут одинаковыми и равными внутренним моментам на обоих участках. Следовательно, эпюры крутящих моментов выровняются (рис. 4.9).

Тогда момент M станет равен $2 M_T$:

$$[M] = 2 M_T = 2 [\tau] W_{пл} = 2 [\tau] \frac{\pi d^3}{12} = [\tau] \frac{\pi d^3}{6}$$

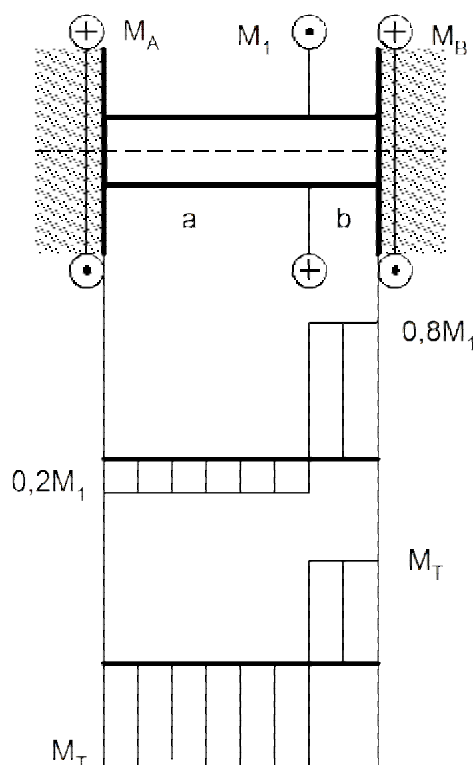


Рис. 4.9. Эпюры моментов

Чтобы сравнить результаты расчета, полученные по двум методам, поделим момент, рассчитанный по несущей способности на момент, рассчитанный по допускаемому напряжению:

$$\frac{[M_1]_{н.с.}}{[M_1]_{д.н.}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{125}{16}} = \frac{16}{7,5} = 2,13$$

Традиционный расчет опять значительно завышает запас по прочности.

4.4.3. Резервы систем, работающих на изгиб. Метод выровненных эпюр

Брус при изгибе рассчитывается на прочность с помощью теорий прочности в форме полной проверки. Но если рассчитывается длинная балка, у которой длина значительно превышает поперечные размеры, влиянием касательных напряжений пренебрегают. Тогда расчет проводят по опасному сечению, в котором изгибающий момент максимален. При расчете по допускаемым напряжениям считается, что если напряжения в крайних волокнах этого сечения достигнут предела текучести, наступит разрушение.

На самом деле балка может и дальше сопротивляться действию внешних нагрузок, т.к. внутренняя область сечения находится в упругом состоянии. Если продолжать увеличивать внешний момент, в опасном сечении зона пластических деформаций проникает все глубже к нейтральной оси. Когда во всех точках сечения напряжения станут равны пределу текучести, несущая способность сечения будет исчерпана. Оно превратится в пластический шарнир. **Пластический шарнир по своему воздействию на брус похож на обычный промежуточный шарнир, но в отличие от него в пластическом шарнире изгибающий момент не равен нулю.** Значение момента составляет величину M_T , при которой во всех точках напряжения равны пределу текучести.

Для статически определимой балки возникновение пластического шарнира означает потерю равновесия и, следовательно, предел несущей способности. Поэтому статически определимые системы имеют только резерв по сечению.

Статически неопределимые балки не теряют равновесия при возникновении одного пластического шарнира. Лишние связи задают дополнительный запас по степеням свободы. При возникновении одного пластического шарнира одиножды неопределимая балка становится эквивалентна статически определимой балке с обычным шарниром. Чем выше степень статической неопределимости, тем образование большего числа промежуточных шарниров она допускает.

В качестве примера рассмотрим решение задачи, показанной на рис. 4.10.

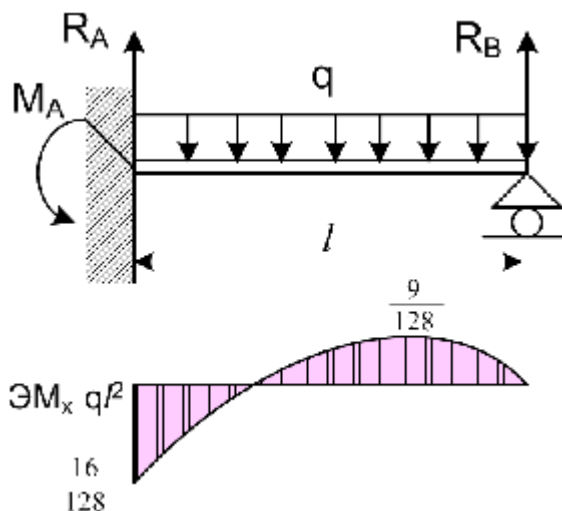


Рис. 4.10. Статически неопределимая балка

Сначала раскрывается статическая неопределимость, затем по вычисленным значениям опорных реакций строятся эпюры изгибающего момента, применяя метод сечений (рис 4.10).

Максимальный внутренний момент возникает в сечении, находящемся в заделке и равен:

$$M_{x \max} = \frac{16}{128} q l^2$$

Проведем расчет на прочность по допускаемым напряжениям. Из условия прочности определим допускаемую нагрузку.

$$M_{x \max} = \frac{16}{128} q l^2 \leq [\sigma] W_x$$

$$[q] \leq \frac{128 [\sigma] W_x}{16 l^2}$$

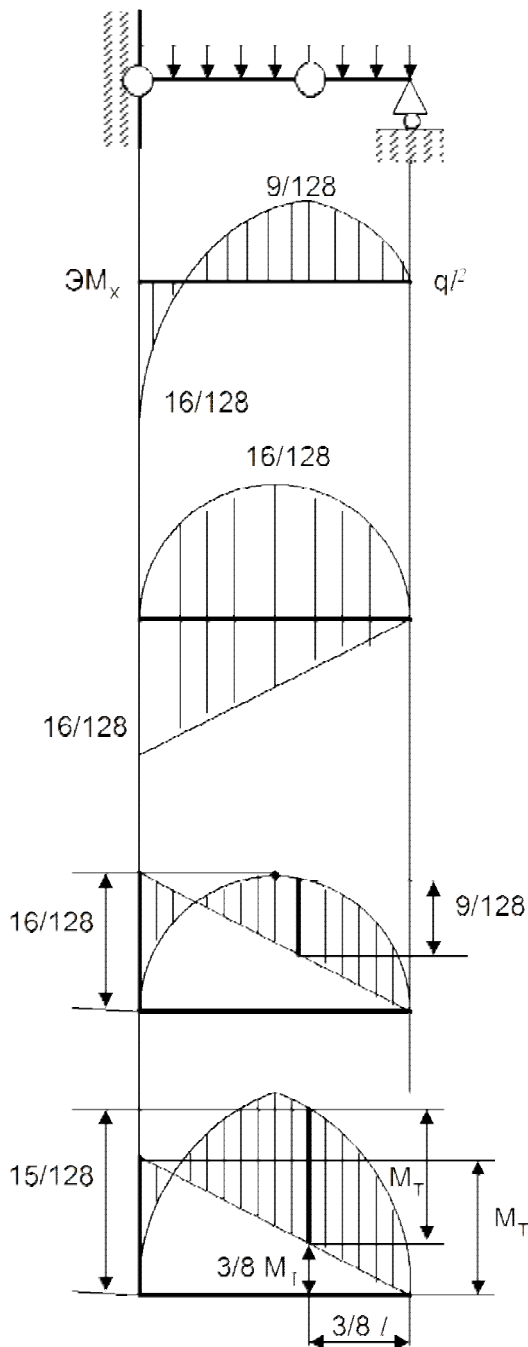


Рис. 4.11. Метод выровненных эпюр

Порядок действий.

1. Разделяем эпюры от внешних нагрузок и эпюры от лишней связи – момента защемления. (вторая сверху эпюра на рис. 4.11). Эта эпюра эквивалентна первой, только для вычисления момента в любой точке, нужно из положительной эпюры вычесть соответствующую отрицательную.
2. Эпюру от лишней связи – момента переворачиваем со сжатого волокна на растянутое. Теперь положительная и отрицательная эпюры вычитаются. Реальная эпюра – заштрихованная часть на третьей эпюре.
3. Строим выровненную эпюру. Для этого в точках с пластическим шарниром откладываем

Теперь для сравнения рассчитаем эту же балку по несущей способности. Увеличение интенсивности распределенной нагрузки Q рано или поздно приведет к тому, что сечение в заделке превратится в пластический шарнир. В нем сечение теперь может поворачиваться. Заделка перестает препятствовать угловым перемещениям. Значит, заделка превращается в шарнирно неподвижную опору. Но балка при этом не теряет равновесия. Она теперь работает как двухопорная балка.

Продолжаем дальше увеличивать нагрузку. Напряжения в пластическом шарнире не растут, оставаясь равными пределу текучести. Значит и внутренний момент остается постоянным и равным некоторому значению M_T . Напряжения увеличиваются в других сечениях, в том числе со вторым наибольшим значением. Рано или поздно в этом сечении тоже образуется пластический шарнир. Двухопорная балка с шарниром на пролете не удовлетворяет принципу кинематической неизменяемости. Ее число степеней свободы теперь больше, чем удерживающих связей. Балка потеряла равновесие – под действием нагрузки она пластично переламывается в шарнире за счет того, что правая шарнирно подвижная опора подкатывается влево. Это означает исчерпание несущей способности. Как и ожидалось одиножды определяемую систему можно нагружать до возникновения двух пластических шарниров. **Теперь в обоих шарнирах напряжения и значит моменты одинаковы, т.е. эпюры выровнялись.** Для расчета по несущей способности применяем **метод выровненных эпюр**. Преобразования эпюр показаны на рис. 4.11.

произвольные, но равные моменты M_T . Характерные точки эпюры соединяем прямыми либо кривыми линиями (в нашем примере линии должны быть кривыми).. **Построенная таким образом эпюра носит название выровненной эпюры.**

Выровненная эпюра отвечает исчерпанию несущей способности всех пролетов (в общем случае, когда пролетов много). Если все нагрузки возрастают одновременно и пропорционально друг другу, в общем случае это состояние невозможно, т.к. балка выйдет из строя при исчерпании несущей способности одного какого-нибудь пролета. Поэтому найдем предельную нагрузку для каждого пролета, а за окончательную предельную нагрузку для всей балки примем наименьшую из них.

В нашем случае по выровненной эпюре можно составить соотношение:

$$\frac{3}{8}M_T + M_T = \frac{11}{8}M_T = \frac{15}{128}ql^2$$

Отсюда определяем допускаемую нагрузку:

$$[q] = \frac{11}{8}[M_T] \frac{128}{15} \frac{1}{l^2} = \frac{176}{15}[\sigma] \frac{W_{пл}}{l^2}$$

Сравним результаты расчетов. Для этого нагрузку, полученную из расчета по несущей способности поделим на нагрузку, полученную из расчета по допускаемым напряжениям.

$$\frac{[q]_{н.с.}}{[q]_{д.н.}} = \frac{\frac{176}{15}W_{пл}}{\frac{128}{16}W_x} = \frac{176}{120} \frac{W_{пл}}{W_x} \approx 1,47 \frac{W_{пл}}{W_x}$$

Для сечения в форме квадрата мы вывели отношение моментов сопротивления. Оно оказалось равным 1,5. Тогда отношение нагрузок составит величину равную $1,47 \cdot 1,5 = 2,2$.

Это значит, обычный расчет на прочность занижил в 2 с лишним раза допускаемую нагрузку. Следовательно, для статически неопределимых систем расчет на прочность по допускаемым напряжениям особенно нежелателен, т.к. значительно завышает запас по прочности.