

Министерство образования Российской Федерации
Казанский государственный технологический университет

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ЗАЩЕМЛЕНИЯ СТАТИЧЕ-
СКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ БАЛКИ**

Методические указания к лабораторной работе

Казань 2000

Составитель: доц.И.А. Сабанаев, В.В. Биктагиров,
ст.преп. Ф.М. Алмакаева.

Определение момента защемления статически неопределимой балки.: /Метод.указ. к лаб.работе/.- Казан.гос.технол.ун-т; Сост.: И.А.Сабанаев. Казань, 2000. 16 с.

Работа посвящена изучению экспериментальных способов раскрытия статической неопределимости при плоском изгибе и проверке теоретических методов, путем сравнения полученных результатов. В работе приводятся примеры расчета, призванные помочь студенту при освоении расчетных методов, а также контрольные вопросы для самопроверки.

Методические указания рекомендуются для студентов механических специальностей, выполняющих лабораторный практикум по курсу сопротивления материалов.

Подготовлена на кафедре МАХП и ПСМ Нижнекамского химико-технологического института КГТУ.

Печатается по решению методической комиссии НХТИ
КГТУ

Рецензенты: доц.
доц.

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: изучить расчетные способы раскрытия статической неопределимости, рассмотреть принципы решения статически неопределимых задач экспериментальными методами на примере двухопорной балки, расчетная схема которой показана на рис. 1.1..

ОБОРУДОВАНИЕ: лабораторная установка типа СМ11А, индикатор часового типа, набор грузов.

1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.

Для заданной статически неопределимой балки (рис. 1.1) определить момент защемления тремя способами:

- экспериментально на лабораторной установке;
- теоретически с использованием метода сил;
- теоретически с применением уравнения трех моментов.

Сравните результаты, полученные расчетными способами с измеренным значением, оцените погрешности. Результаты представьте в табличной форме.

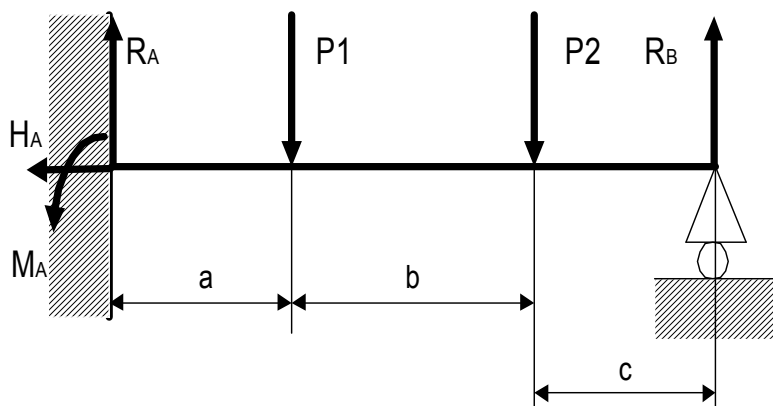


Рис.1.1 Схема задачи

2. ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ

2.1. Основные положения

В практических расчетах нередко приходится встречаться с такими системами, в которых определить все усилия из одних лишь уравнений статики не представляется возможным, т.к. число неизвестных превышает число уравнений. Такие системы называются статически неопределимыми. Методы сопротивления материалов позволяют решать подобные задачи. Принцип решения заключается в том, что дополнительно к уравнениям равновесия составляются уравнения деформаций (перемещений). Если рассматривать неизвестные усилия (внешние и внутренние) как связи, обеспечивающие равновесие всей системы, то оказывается, что в статически неопределимых задачах связей больше, чем это необходимо для кинематической неизменяемости. Поэтому дополнительные связи называют лишними. Хотя, лишними их можно назвать только с точки зрения равновесия системы. С практической же точки зрения они далеко не лишние, т.к. повышают жесткость и прочность системы до нужного уровня без увеличения размеров сечения. Особенностью статически неопределимых систем (в отличие от статически определимых) является то обстоятельство, что распределение усилий в них зависит не только от внешних сил, но и от соотношений между поперечными размерами отдельных элементов. Если элементы системы изготовлены из различных материалов, то распределение усилий также зависит от модулей упругости материалов.

2.2. Метод сил.

Основным методом расчета статически неопределимых систем, в которых в качестве лишних связей выступают внешние силы (реакции опор), является метод сил. Данный способ

является универсальным, т.е. применим практически к любым статически неопределимым системам. Метод основывается на том условии, что перемещения по направлению лишних связей должны быть равны нулю. Тогда, если на заданной системе определить перемещения от всех внешних сил, в том числе и от лишних связей, и затем полученное уравнение приравнять к нулю, то легко рассчитать эти лишние реакции опор, входящие в уравнение в качестве неизвестных параметров.

Уравнения перемещения представляются в виде системы канонических уравнений (1), где каждое уравнение имеет смысл перемещения в направлении одной лишней связи.

$$\begin{aligned} \delta_{11} + \delta_{12} + \dots + \Delta_{1P} &= 0 \\ \delta_{21} + \delta_{22} + \dots + \Delta_{2P} &= 0 \\ \delta_{31} + \delta_{32} + \dots + \Delta_{3P} &= 0 \\ \vdots &\vdots \\ \delta_{S1} + \delta_{S2} + \dots + \Delta_{SP} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

$$s = m - n$$

s – степень статической неопределимости,

m – общее число связей

n – число возможных уравнений равновесия.

Перемещения определяются либо методом Мора, либо по способу Верещагина.

2.3. Уравнение трех моментов

Другим методом расчета статически неопределимых систем является способ с использованием уравнения трех моментов. В отличие от первого данный метод не является универсальным, а может быть использован только применительно к многопролетным неразрезным балкам. Неразрезной балкой называется статически неопределимая балка, опирающаяся на шарнирные опоры и не имеющая промежуточных шарниров.

Крайние сечения неразрезной балки могут быть свободны, заделаны или оперты на шарнирные опоры. Одна из опор неразрезной балки имеет связь, препятствующую смещению вдоль ее оси. Решение этим методом основано на следующем приеме.

Неразрезная балка превращается в разрезную, путем добавления дополнительных промежуточных шарниров на каждой промежуточной опоре. В силу того, что в промежуточном шарнире изгибающий момент равен нулю, появляется необходимость в приложении внешних изгибающих моментов в этих сечениях, чтобы новая система была эквивалентна заданной. Рассматривая уравнения совместности деформаций (углы поворота сечения на опоре для пролета слева и пролета справа должен быть одинаковым), получается уравнение трех моментов.

$$x_{i-1} \cdot l_i + 2x_i(l_i + l_{i+1}) + x_{i+1} \cdot l_{i+1} = -6 \left(\frac{\omega_i \cdot a_i}{l_i} + \frac{\omega_{i+1} \cdot a_{i+1}}{l_{i+1}} \right) \quad (2)$$

Таких уравнений нужно записать столько, сколько в заданной системе лишних связей. Т.к. в неразрезной балке их количество равно числу промежуточных опор, то для каждой промежуточной опоры составляется свое уравнение трех моментов. Чтобы составить систему уравнений для всей балки, нужно пронумеровать все промежуточные опоры, начиная с номера 1. К каждой опоре прикладывается момент X с соответствующим ей номером. Для каждой промежуточной опоры записывается свое уравнение заменой индекса n на ее номер. При этом необходимо помнить, что на крайних опорах моменты равны нулю. В результате в записанной системе уравнений количество неизвестных моментов равно числу уравнений. Далее строятся эпюры изгибающего момента для каждого пролета как для отдельной независимой балки. Вычисляются произведения площади эпюр на расстояния от смежной опоры до центра тяжести эпюры. Решается система уравнений, из которых определяются мо-

менты X для каждой опоры. Далее вычисляются опорные реакции для каждого пролета с учетом полученных моментов. После этой операции окажется, что для каждой промежуточной опоры имеется две реакции, вычисленные для смежных пролетов. Поэтому, окончательное значение опорных реакций рассчитывается как их сумма. Чтобы записать уравнение трех моментов для балки с защемлением, нужно заменить заделку на дополнительный пролет, длина которого равна нулю. Вычисленный момент X на данной опоре является моментом защемления в заделке.

3.ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

Для проведения измерения момента, возникающего в защемлении применяется лабораторная установка типа СМ 11. Ее устройство показано на рис. 3.1., а расчетная схема – на рис.3.2.

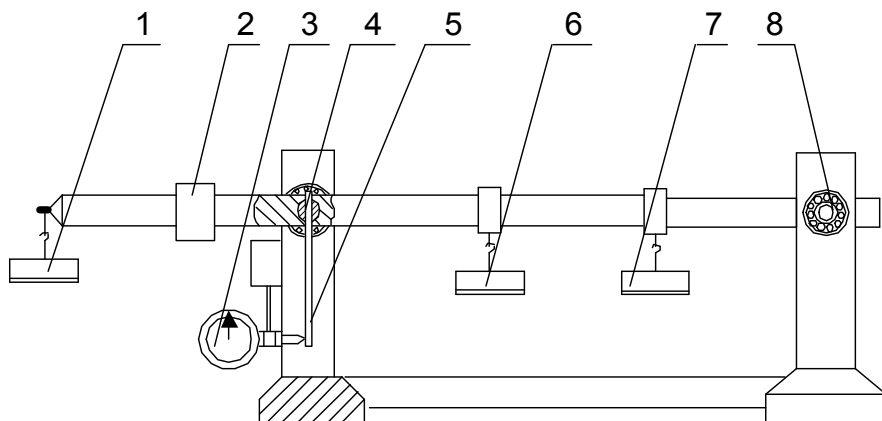


рис. 3.1. Устройство экспериментальной установки.

Лабораторная установка моделирует заданную статически неопределимую систему, схема которой показана на рис. 1.1. Внешние силы P_1 и P_2 задаются установкой грузов на под-

вески 6 и 7. Опора 4 (т. А) – неподвижно-шарнирная, опора 8 (т. В) – подвижно-шарнирная, допускает осевое перемещение. Расчетные схемы, показанные на рис. 1.1. и рис. 3.2 не совпадают. Но именно это различие позволяет решить поставленную задачу. Схемы станут эквивалентны в том случае, если угол поворота поперечного сечения балки на опоре А (поз. 4) для схемы, показанной на рис. 3.2 станет равным нулю. Отсутствие углового перемещения на опоре задает условия, соответствующие защемлению.

При выполнении этого условия изгибающий момент от сил Q_1 и Q_2 , которые задаются грузами 1 и 2, в точке А будет равен моменту, возникающему в заделке на схеме 1.1.

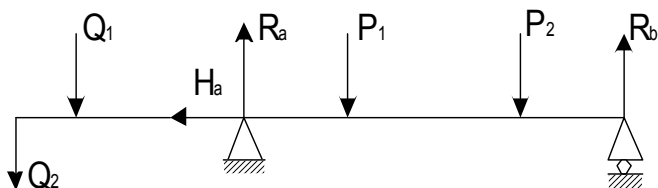


Рис.3.2 Схема экспериментальной установки

Следовательно, вычислив величины моментов сил Q_1 и Q_2 в точке А можно определить момент защемления статически неопределимой балки, показанной на рис. 1.1. Угол поворота сечения в точке А фиксируется с помощью индикатора часового типа 3, установленного в непосредственном контакте с рычагом 5, который жестко связан с поперечным сечением балки.

4. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

4.1 ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

1. Согласно заданному варианту подготовить установку для выполнения опыта (выбор варианта по таблице 1). Для этого установите подвески без грузов в тех местах, которые преду-

смотрены вашим вариантом. Передвигая груз Q1, установите его на шкале рычагов (см. рис. 4.1) в удобную точку, например на линейке с отметкой 6 см. Проверьте, подвеска для второго груза Q2 должна находиться на месте, но без самого груза. Затем закрепите индикатор, установив его шток в соприкосновение с рычагом.

Таблица 1. Выбор данных по номеру варианта

№ варианта	P ₁ Кг	P ₂ Кг	a м	b м	c м
1	1	2	0.2	0.3	0.3
2	1	2	0.1	0.2	0.4
3	2	1	0.3	0.4	0.1
4	2	1	0.4	0.2	0.2

2. Установить стрелку индикатора на “0”.
3. По шкале рычагов произвести отсчет начальной координаты C_1 противовеса Q_1 (рис. 4.1).
4. К балке в заданных сечениях приложить нагрузки P_1 и P_2 .
Стрелка индикатора сместится от нулевой позиции.
5. Сместить противовес Q_1 из исходного положения C_1 в положение C_2 , которое соответствует возвращению стрелки индикатора в исходное положение, т.е. на “0”. При этом, стрелка индикатора должна не просто вернуться на ноль, но и совершить назад столько оборотов, сколько произошло в момент нагружения. Если длины линейки, по которой перемещается влево противовес Q1 недостаточно для полного обнуления индикатора, верните противовес на место и подвесьте дополнительный противовес Q2 на свою подвеску. Повторите опыт по перемещению первого противовеса. Полная длина рычага равна $C_3=33$ см.
6. По окончании опыта балку разгрузите.

7. Определение величины момента защемления, препятствующего повороту опорного сечения в процессе опыта, произвести по формуле:

$$M_A = Q_1(C_2 - C_1) + Q_2 \cdot C_3$$

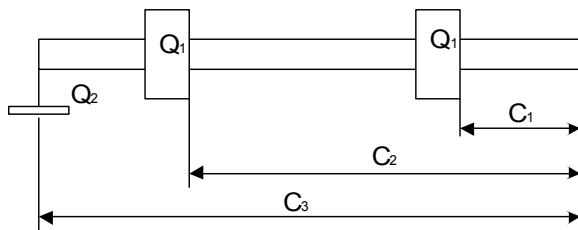


Рис. 4.1 Схема расчета момента, создаваемого рычагом.

8. Решите задачу двумя расчетными методами: методом сил и с помощью уравнения трех моментов. При решении по методу сил рекомендуется в качестве лишней связи принять момент в заделке. При решении по уравнению трех моментов необходимо заделку представить в виде дополнительного пролета, длина которого равна нулю.

4.2 ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

4.2.1 МЕТОД СИЛ.

1. Вычислим степень статической неопределимости s .
Балка имеет четыре связи (M_A , R_A , H_A , R_B). Число уравнений статики – 3. Тогда $s = 4 - 3 = 1$. Значит 1 связь – лишняя.
2. В качестве лишней связи примем момент в заделке. Тогда основной балкой будет балка, показанная на рис. 4.2. Жесткая заделка без момента становится неподвижно-шарнирной опорой. Момент защемления отбрасывается как лишняя связь. В результате балка становится статически определимой.

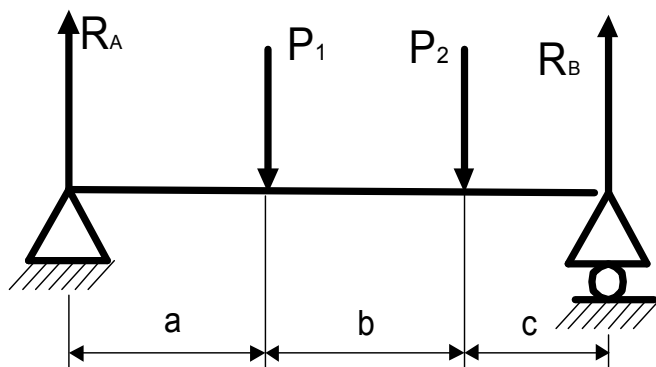


Рис. 4.2 Схема основной системы

3. Степень статической неопределимости $s = 1$, поэтому составляем только одно каноническое уравнение, выбрав из системы уравнений первое – самое верхнее. В нашей задаче одна лишняя связь X_1 , остальные $X_2, X_3 \dots$ равны 0. Тогда, в уравнении останется только 2 члена :

$$X_1 \cdot \delta_{11} + \Delta_{1p} = 0 \quad (3)$$

X_1 – лишняя связь, в нашем случае - момент в заделке M_A .

4. Строим вспомогательную (единичную) балку, которая геометрически совпадает с основной, но без внешних нагрузок (без сил P_1 и P_2). К вспомогательной системе прикладываем на левой опоре вместо связи X_1 момент $M = 1$ (рис. 4.3).
5. Перемещения – коэффициенты канонического уравнения определяем способом Верещагина. $\delta_{11}X_1$ – перемещение (угол поворота сечения в т А) за счет неизвестной силы X_1 , т.е. момента заделки. Оно вычисляется как произведение перемещения δ_{11} , возникающего от единичного момента $M=1$ и самой силы X_1 . Коэффициент Δ_{1p} – перемещение (угол поворота сечения) за счет всех внешних сил. Для вычисления пе-

ремещений строим грузовую эпюру изгибающих моментов для основной системы, строим единичную эпюру изгибающих моментов для вспомогательной системы, показанной на рис.4.3.

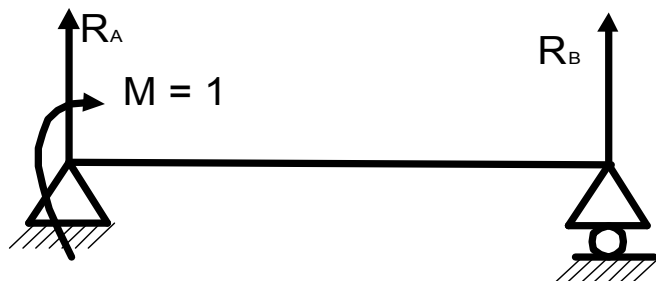


Рис. 4.3 Схема вспомогательной системы

6. Определяем величины коэффициентов канонического уравнения путем перемножения эпюр по формуле Верещагина:

$$\Delta_{1P} = \frac{\omega \overline{M}_c}{E I_x} \quad (4)$$

$$\delta_{11} = \frac{\overline{\omega} \overline{M}_c}{E I_x} \quad (5)$$

ω - площадь грузовой эпюры,

$\overline{\omega}$ - площадь единичной эпюры,

M_c – единичный момент под центром тяжести эпюры ω или $\overline{\omega}$.

а) Определение опорных реакций.

Составляем уравнения равновесия для основной балки.

$$P_1 \cdot a + P_2(a + \vartheta) - R_{\vartheta}(a + \vartheta + c) = 0$$

$$R_{\vartheta} = \frac{P_1 \cdot a + P_2(a + \vartheta)}{a + \vartheta + c}$$

Уравнение равновесия для вспомогательной балки.

$$-1 + \bar{R}_{\vartheta} \cdot (a + \vartheta + c) = 0 \quad \text{Тогда:}$$

$$\bar{R}_{\vartheta} = \frac{1}{a + \vartheta + c}$$

б) Строим эпюры изгибающих моментов. В точке В:

$$M = 0 \quad \bar{M} = 0$$

в точке приложения силы P_2 :

$$M = R_{\vartheta} \cdot c \quad \bar{M} = \bar{R}_{\vartheta} \cdot c$$

в точке приложения силы P_1 :

$$M = R_{\vartheta} \cdot (c + \vartheta) - P_2 \cdot \vartheta \quad \bar{M} = \bar{R}_{\vartheta} \cdot (c + \vartheta)$$

в точке приложения силы R_A :

$$M = 0 \quad \bar{M} = 0$$

Примерные эпюры M и $\bar{M}$ представлена на рис. 4.4.

Вычисляем δ_{II} по формуле (5). Для этого, единичную эпюру «умножаем на себя», т.е. вычисляем площадь единичной эпюры и умножаем на момент, взятый под ее же центром тяжести. Вычисляем Δ_{IP} , по формуле (4), т.е. грузовую эпюру «умножаем» на единичную. Чтобы облегчить вычисление площадей грузовую разбиваем на 4 фигуры. Далее, каждую грузовую умножаем на соответствующую единичную. Площадь вычисляем на грузовой эпюре, а момент определяем на единичной, взятой под центром тяжести грузовой. Полное перемещение будет получено после

сложения всех четырех составляющих. Жесткость остается в виде EI_x и в последующем она сократится.

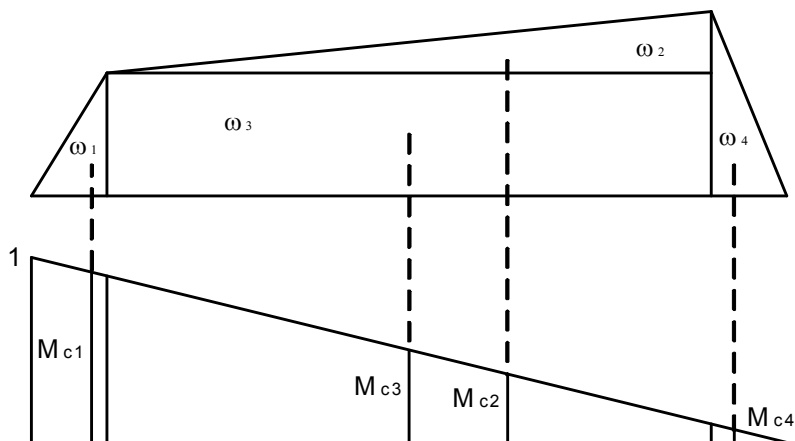


Рис.4.4. Эпюры для основной и вспомогательной балок

Неизвестную X_1 , т.е. момент в заделке M_A находим из канонического уравнения (3):

$$X_1 = - \frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}}$$

4.2.2 УРАВНЕНИЕ ТРЕХ МОМЕНТОВ

Расчетную схему получаем, добавив вместо левого защемленного конца пролет длиной $L_I = 0$ (рис. 4.5).

Запишем уравнение трех моментов для опоры 1, заменив в уравнении (2) i на ее номер, т.е. на 1.

$$M_0 \cdot l_1 + 2M_1(l_1 + l_2) + M_2 \cdot l_2 = -6 \cdot \left(\frac{\omega_1 b_1}{l_1} + \frac{\omega_2 b_2}{l_2} \right)$$

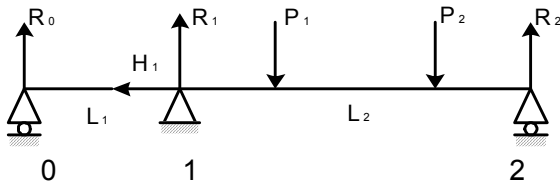


Рис. 4.5. Схема задачи

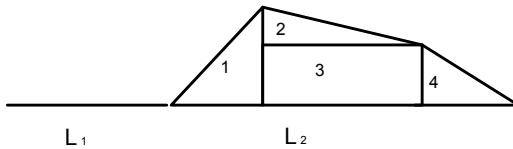


Рис. 4.6. Эпюры моментов

Учитывая, что $M_0 = 0$; $M_2 = 0$ $\ell_1 = 0$, $\omega_2 = \omega$, $\omega_1 = 0$ получаем:

$$2 \cdot M_1 \cdot l_2 = -6 \cdot \frac{\omega b}{l_2}$$

$$M_1 = -6 \cdot \frac{\omega b}{2 \cdot l_2 \cdot l_2}$$

Для вычисления правой части уравнения трех моментов строим эпюры изгибающих моментов. Строятся эпюры для пролета 2 как для отдельной балки. Примерные эпюры показаны на рис. 4.6. В этой задаче эпюры изгибающего момента совпадают с грузовой эпюрой, построенной при решении задачи методом сил.

Для удобства вычислений эпюру разбиваем на 4 площади: 1 прямоугольник и 3 треугольника. Теперь произведение ωb можно вычислить как сумму четырех составляющих:

$$\omega b = \omega_1 b_1 + \omega_2 b_2 + \omega_3 b_3 + \omega_4 b_4$$

Номерами 1,2,3,4 обозначены соответствующие площади прямоугольника и треугольников. Расстояния до центра тяжести b для каждой фигуры отсчитываются от правой опоры 2. Полученный момент есть M_A

Отчет о выполнении работы должен содержать:

1. Название работы.
2. Цель работы.
3. Расчетную схему балки с указанием расстояния до точки приложения внешних нагрузок.
4. Теоретические расчеты с графической частью.
5. Выводы по работе.

Результаты расчетов и измерений представить в виде таблицы:

Метод сил		Уравнение трех моментов		Эксперим. Результат
$M_{\text{теор}}$ Нм	Погрешн. %	$M_{\text{теор}}$ Нм	Погрешн. %	$M_{\text{экс}}$ Нм

Погрешность вычисляется по формуле:

$$\varepsilon = \frac{M_{\text{теор.}} - M_{\text{экс.}}}{M_{\text{теор.}}} \cdot 100\%$$