Нижнекамский химико-технологический институт
Машины и аппараты химических производств

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ГЛАВНЫХ ОСЕЙ СЕЧЕНИЯ ЗАДАННОЙ ФОРМЫ И ЗНАЧЕНИЙ ГЛАВНЫХ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ.

Методические указания к выполнению лабораторной работы

Сабанаев И.А., Алмакаева Ф.М.

Нижнекамск 2009

Цель работы: изучить технологию расчета положения главных осей для сечения заданной формы и значений главных моментов инерции.

Задачи, которые необходимо решить для достижения цели работы:

1) изучение аналитического способа определения центра тяжести составного сечения;
2) изучение способа расчета моментов инерции относительно центральных осей составного сечения путем параллельного переноса осей координат;
3) изучение способа расчета положения главных осей сечения и главных моментов инерции по известным значениям моментов инерции относительно центральных осей путем поворота осей координат.

Приборы и материалы для проведения лабораторной работы: брус составного сечения, полученный путем соединения электрической дуговой сваркой нескольких стандартных профилей (швеллер, уголок, двутавр, пластина и пр.), штангенциркуль, линейка, транспортир, миллиметровая бумага.

Введение

Задача определения положения главных осей сечения и вычисления значений главных моментов инерции нередко встречается в практической деятельности инженера-механика. Допустим, требуется собрать раму для монтажа на ней насоса или редуктора, несущая часть которой, должна обладать высокой прочностью или жесткостью. Для этого брус, на котором непосредственно будет крепиться устройство, должен иметь достаточно прочное и жесткое сечение. Решения задачи можно достичь соединением в единое сечение нескольких стандартных профилей: уголков, швеллеров, двутавров и др. Например, берутся двутавр, уголок, пластина одинаковой длины и объединяются в единый брус, путем электрической дуговой сварки по всей длине (см. рис. 2). Причем, если правильно сориентировать их по отношению друг к другу, можно достичь наилучшей прочности и жесткости. А т.к. моменты инерции являются характеристикой жесткости сечения, то решение задачи сводится к поиску экстремального (наибольшего) для данного сечения момента инерции.

1. Теоретические основы работы
1.1. Основные характеристики плоских сечений

Статические моменты площади сечения есть произведение площади сечения на расстояние от оси до центра тяжести сечения:

$$S_X = F \cdot Y_C \qquad S_Y = F \cdot X_C \qquad \ldots(1)$$

Свойства статических моментов.

1. Статические моменты имеют размерность длины в третьей степени: м^3, см^3, мм^3 (площадь умножить на расстояние).
2. Они могут быть положительными, отрицательными и равными нулю, в зависимости от положения осей координат (или знака координат X, У).
3. Статические моменты относительно осей, проходящих через цент тяжести, равны нулю (расстояние от оси до центра тяжести равно нулю, значит и произведение равно нулю).

Оси, проходящие через центр тяжести сечения, называются центральными осями.

С помощью статических моментов можно определить координаты центра тяжести. Для этого формулы 1 нужно переписать относительно координат точки С – центра тяжести сечения:

$$X_c = \frac{S_y}{F} \qquad y_c = \frac{S_x}{F} \qquad \ldots(2)$$

Если сечение имеет сложную форму, то следует вначале разбить его на простейшие фигуры (прямоугольники, треугольники, квадраты, швеллера, уголки, двутавры и т.п.), для каждой из которых известно положение центра тяжести, а затем вычислить координаты центра тяжести всей фигуры по следующим формулам:

$$X_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i \cdot x_{ci}}{\sum_{i=1}^{n} F_i}, \qquad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i \cdot y_{ci}}{\sum_{i=1}^{n} F_i} \qquad \ldots(3)$$

где i – номер простейшей фигуры, F_i – ее площадь.
X_{ci}, Y_{ci} – координаты центра тяжести i - фигуры

Моменты инерции

Различают осевые, полярный и центробежный моменты инерции сечения. Осевым моментом инерции относительно оси X называется интеграл вида

$$I_x = \int_F y^2 dF \qquad \ldots(4)$$

относительно оси Y :

$$I_y = \int_F x^2 dF \qquad \ldots(5)$$

Полярным моментом инерции сечения относительно полюса О называется интеграл

$$I_p = \int_F \rho^2 dF \qquad \ldots(6)$$

где ρ – полюсное расстояние до элементарной площадки

Центробежным моментом инерции сечения относительно осей X и Y называется интеграл

$$I_{xy} = \int_F x \cdot y \cdot dF \qquad \ldots(7)$$

Свойства моментов инерции:

1) размерность $м^4$, $см^4$, $мм^4$;
2) осевые и полярный моменты инерции всегда положительны (с каким бы знаком ни была координата – при возведении в квадрат она становится положительной),
3) центробежный может быть положительным, отрицательным и равным нулю, в зависимости от положения осей;
4) сумма осевых моментов инерции не зависит от поворота осей координат – она величина постоянная и равная полярному моменту инерции: $I_x + I_y = const$
5) центробежный момент сечения относительно осей, из которых хотя бы одна является осью симметрии, равен нулю.

1.2. Главные оси сечения и главные моменты инерции

При некоторых видах деформации, например растяжении бруса, форма сечения не оказывает никакого влияния на ее величину. Другими словами, нет никакой разницы – растягивать стержень круглой или квадратной формы сечения или сечение в форме, например, швеллера. Жесткость бруса при растяжении зависит только от размеров сечения, т.е. ее площади.

При изгибе, не только размеры, но и форма сечения оказывают существенное влияние на жесткость сечения и, соответственно, способность сопротивляться деформации (см. рис. 1).

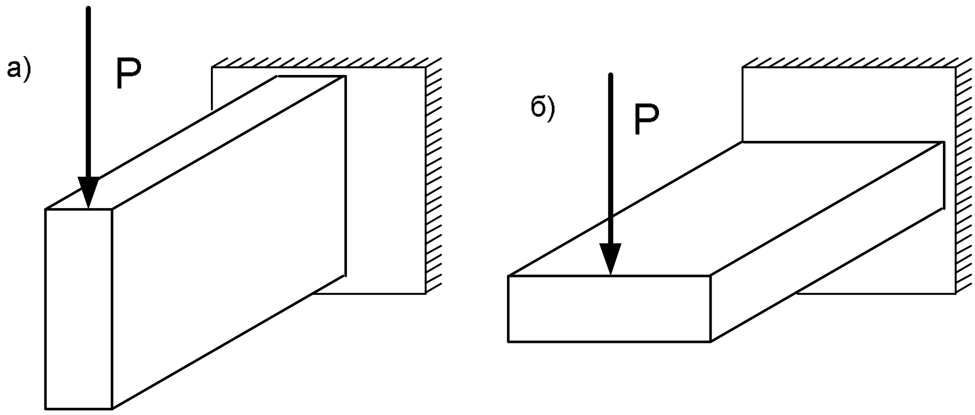

Рис. 1. Влияние формы сечения на величину деформации при изгибе

Брус, изображенный на рис. 1(б) получит больший прогиб, чем брус, изображенный на рис. 1(а), несмотря на то, что величина силы P, длина бруса и площадь сечения одинакова.

На приведенных рисунках, форма сечения задается ориентацией сечения по отношению к изгибающей силе P. В приведенном примере без всяких расчетов можно утверждать, что брус, изображенный на рис. 1(а) обладает большей жесткостью, чем брус, изображенный на рис. 2(б). Таким образом, задача получения максимальной жесткости сводится к правильной ориентации сечения к изгибающей силе.

В случае сложной формы сечения выбор правильного направления изгибающей силы P не столь очевиден, как например, на рис. 2.

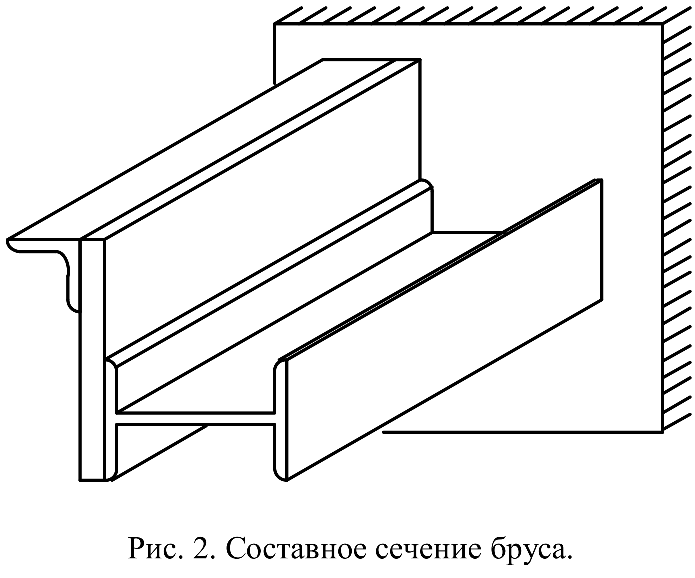

Рис. 2. Составное сечение бруса.

В подобных случаях приходится определять положение главных осей сечения и значения главных моментов инерции.

Главными осями сечения называется такая пара осей X_0, $У_0$, относительно которых моменты инерции экстремальны, т.е. один из них принимает максимально возможное для данного сечения значение, а второй принимает – минимально возможное значение.

Для этого нужно определить угол α_0 между некоторыми выбранными и главными осями сечения. Зная этот угол поворачивают выбранные оси, а значит и изгибающую силу P (см. рис. 3) так, что получить изгиб относительно оси с наибольшим моментом инерции.

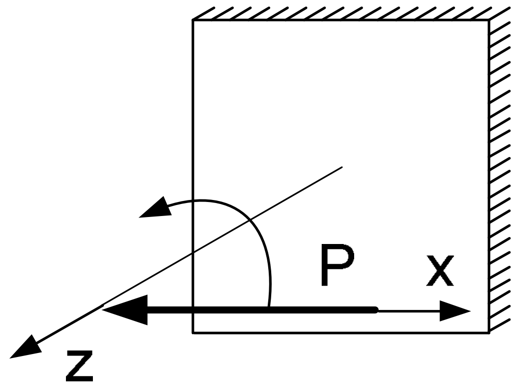

Рис. 3. Выбор направления силы для обеспечения наименьшей деформации

Можно поступить и наоборот, не трогая заданную силу, поворачивать само сечение вокруг продольной оси Z. В данной работе рассматривается именно такой способ решения.

1.3. Методика определения положения главных осей и значений главных моментов инерции

Чтобы решить задачу о положении главных осей сечения и вычисления главных моментов инерции нужно последовательно выполнить 3 процедуры:

1) определение центра тяжести составного сечения на основе статических моментов площади с использованием формул 3;

2) вычисление моментов инерции относительно центральных осей на основе формул параллельного переноса осей координат;

$$I_{xc}=I_x+a^2F$$
$$I_{yc}=I_y+b^2F \qquad \ldots 8$$
$$I_{xcyc}=I_{xy}+abF$$

3) определение угла поворота центральных осей до совмещения их с главными осями и расчет главных моментов инерции на основе формул поворота осей координат.

$$I_{x0}=I_{xc}\cos^2\alpha_0+I_y\sin^2\alpha_0-I_{xcyc}\sin 2\alpha_0$$
$$I_{y0}=I_{xc}\sin^2\alpha_0+I_{yc}\cos^2\alpha_0+I_{xcyc}\sin 2\alpha_0 \qquad \ldots 9$$
$$I_{x0y0}=I_{xcyc}\cos 2\alpha_0+\frac{I_{xc}-I_{yc}}{2}\sin 2\alpha_0$$

где угол между центральными осями Хс, Ус и главными осями Х0, У0 определяется по формуле:

$$tg2\alpha_0 = \frac{2 \cdot I_{xcyc}}{I_{yc} - I_{xc}} \qquad \ldots 10$$

2. Экспериментальная часть работы

2.1. Проведение измерений и определение исходных данных для проведения расчетов

Сначала с помощью штангенциркуля измеряем определяющие размеры для каждого из трех элементов составного сечения. Для пластины нужно измерить высоту и ширину сечения (прямоугольника). Для швеллера, двутавра и уголка следует измерить высоту (h) и ширину (b) сечения, а также толщину полки (t или d для уголка) (см. приложения в конце этого пособия).

Запишите в отчет измеренные значения и далее по этим значениям с помощью таблиц приложения, определите номера стандартных профилей (швеллера, двутавра или уголка). Выпишите из приложения необходимые данные и заполните ими таблицу 1.

Если ваше сечение включает прямоугольник, рассчитайте предварительно его характеристики: площадь F, моменты инерции относительно осей Х и У:

$$F = h \cdot b \qquad I_x = \frac{b \cdot h^3}{12} \qquad I_y = \frac{b^3 \cdot h}{12} \qquad \ldots 11$$

В заключение этого этапа начертите на миллиметровой бумаге в масштабе 1:1 заданное вам составное сечение. Чтобы пояснить ход выполнения работы параллельно с пояснениями к работе в пособии будет решаться пример. Схема и результаты измерения по данным примера приводятся на рис. 4 и в таблице 1.

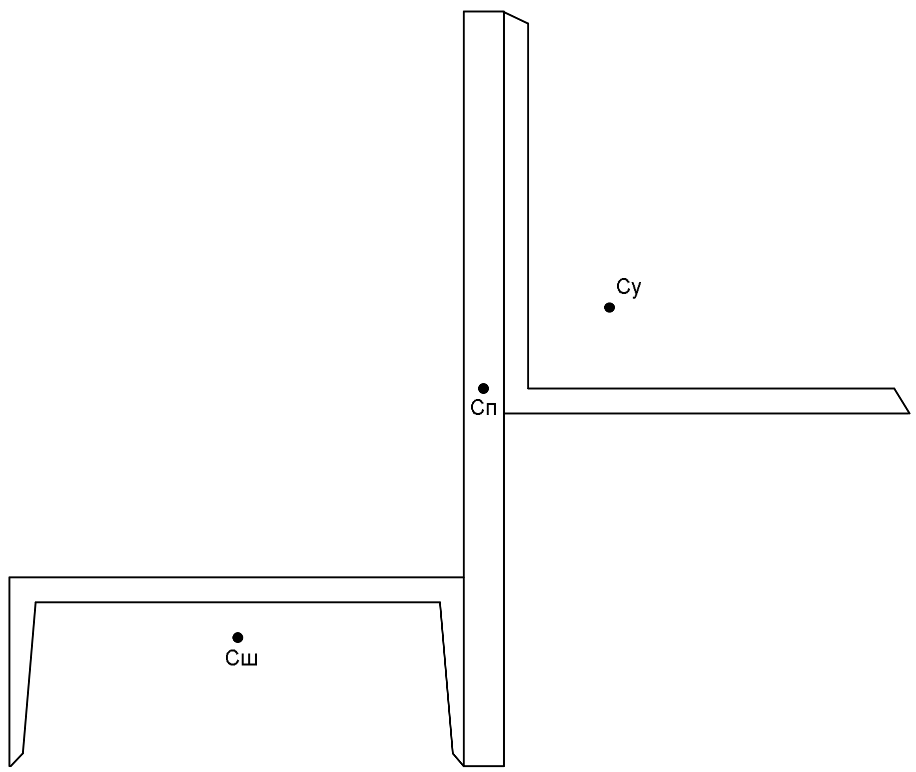

Рис. 4. Задание к рассматриваемому примеру

Таблица 1.

Результаты измерения характеристик отдельных элементов сечения для рассматриваемого примера

Название профиля	Индекс в расчетных формулах	Высота h, см	Ширина b, см	Площадь F, $см^2$	Смещение центра тяжести Z0, см	Момент инерции Ix, $см^4$	Момент инерции Iy, $см^4$	Момент инерции Ixy, $см^4$
Прямоугольник 1,6Х30	п	30	1,6	48	-	3600	10,24	0
Уголок №16(10)*	у	16	16	31,4	4,3	744	744	-455**
Швеллер №18	ш	18	7,4	22,2	2,13	105***	1190***	0

* Примечание. Уголок №16(10) означает, что ширина полки уголка 160 мм (16 см), а толщина стенки составляет в среднем 10 мм.

** Примечание. Центробежный момент инерции относительно неглавных осей для уголка нужно рассчитать по формуле:

$$I_{xy} = -\frac{I_{x0} - I_{y0}}{2} = -\frac{1229 - 319}{2} = -455\ см^4$$

Значения моментов инерции относительно главных осей Х0 и У0, которые используются в этой формуле выбираются по таблице из приложения для вашего уголка.

*** Примечание. Табличные значения моментов инерции для швеллера относительно осей Х и У пришлось поменять местами, т.к. в заданном сечении швеллер повернут на 90^o по отношению к швеллеру, который приводится в приложении.

2.2. Определение положения центра тяжести составного сечения и выбор центральных осей

Для определения положения центра тяжести воспользуемся формулой 3. Чтобы определить начало отсчета расстояний проведем рабочие оси координат. Расчеты будут проще, если оси провести так, чтобы все сечение оказалось в правой верхней четверти координатной плоскости. Для рассматриваемого примера такими осями будут оси Хр и Ур, показанные на рис. 5.

Построения на этом рисунке показывают, как определить координаты центров тяжести отдельных элементов составного сечения относительно выбранных рабочих осей.

1) Для швеллера.

Координата Хсш есть расстояние от оси Ур до центра тяжести швеллера Сш. Она равна половине высоты швеллера h, т.е.:

$$Xсш = ½\ h_ш = 18 / 2 = 9\ см.$$

Координат Усш определяется как разность между шириной швеллера и расстоянием от боковины швеллера до его центра тяжести, т.е.:

$$Усш = b_ш – Z_0ш = 7,4 – 2,13 = 5,\ 27\ см$$

Далее определяем координаты центра тяжести для прямоугольника.

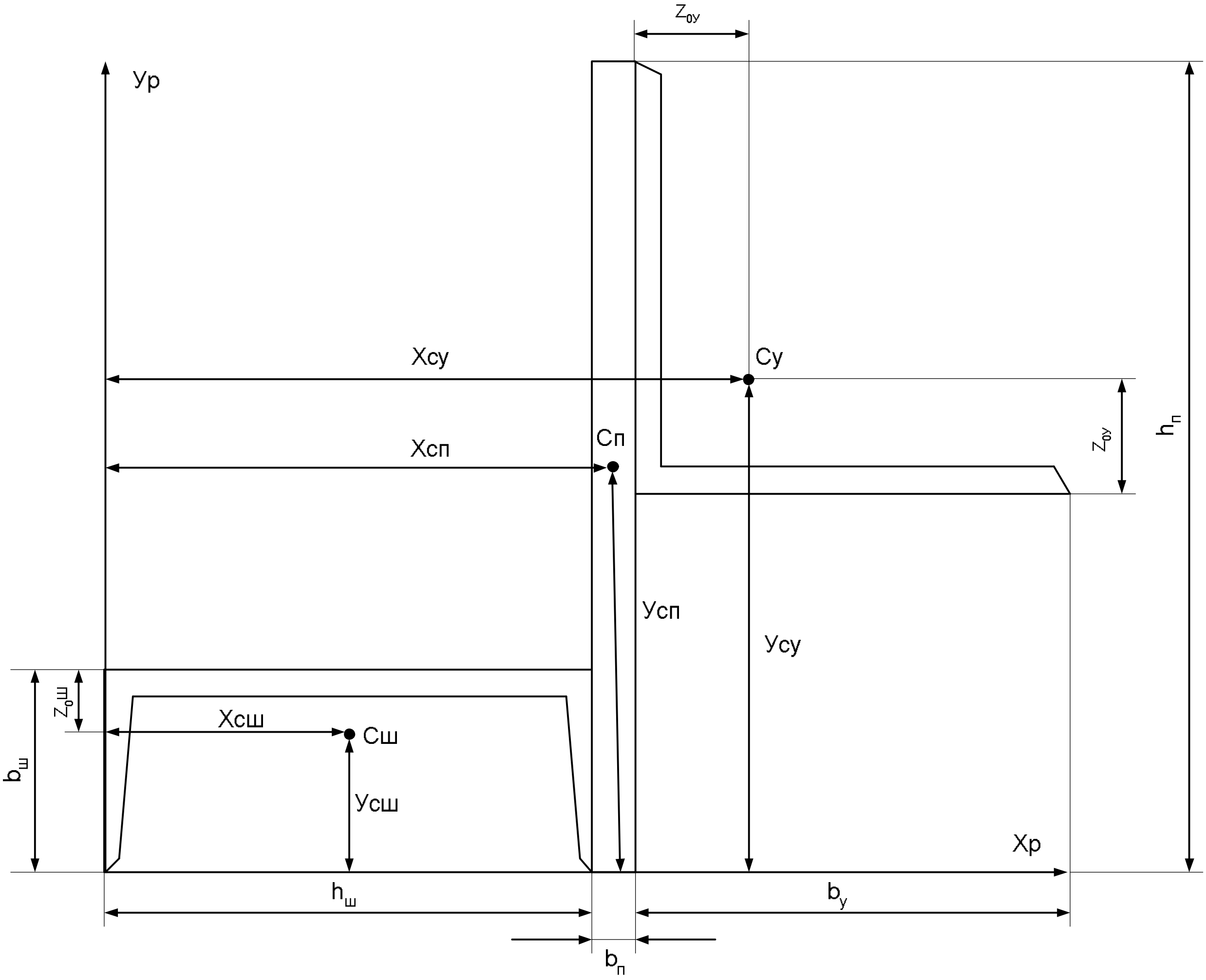

Рис. 5. Определение основных размеров элементов сечения относительно рабочих осей.

2) Для прямоугольника.

Координата Хсп равна расстоянию от оси Ур до центра тяжести прямоугольника и рассчитывается как сумма двух отрезков:

$$Хсп = h_ш + b_п / 2 = 18 + 1,6 / 2 = 18,8 \text{ см.}$$

Координата Усп есть расстояние от оси Хр до центра тяжести прямоугольника и рассчитывается как половина его высоты:

$$Усп = ½ \, h_п = ½ \, 30 = 15 \text{ см.}$$

3) Для уголка.

Координата центра тяжести Хсу рассчитывается как сумма трех отрезков: высоты швеллера, ширины прямоугольника и расстояния до центра тяжести уголка от его боковины:

$$Хсу = h_ш + b_п + Z_0у = 18 + 1,6 + 4,3 = 23,9 \text{ см.}$$

Координата Усу рассчитывается по формуле (см. рис. 5):

$$Усш = h_п – b_у + Z_0у = 30 – 16 + 4,3 = 18,3 \text{ см.}$$

Рассчитаем статические моменты площади составного сечения относительно рабочих осей Хр и Ур. Для этого сложим статические моменты всех элементов составного сечения, а каждый статический момент рассчитаем по формуле 1.

$$S_x = S_{xш} + S_{xп} + S_{xу} = У_{сш} \cdot F_ш + У_{сп} \cdot F_п + У_{су} \cdot F_п = 5{,}27 \cdot 22{,}2 + 15 \cdot 48 + 18{,}3 \cdot 31{,}4 = 1411{,}6\ см^3.$$

$$S_y = S_{уш} + S_{уп} + S_{уу} = X_{сш} \cdot F_ш + X_{сп} \cdot F_п + X_{су} \cdot F_п = 9 \cdot 22{,}2 + 18{,}8 \cdot 48 + 23{,}9 \cdot 31{,}4 = 1852{,}6\ см^3.$$

Теперь по формуле 3 вычислим координаты центра тяжести составного сечения.

$$X_C = \frac{1852{,}6}{22{,}2 + 48 + 31{,}4} = 18{,}2\ см \qquad У_C = \frac{1411{,}6}{101{,}6} = 13{,}8\ см$$

Теперь определим расстояния между центром тяжести составного сечения и центром тяжести каждого его элемента.

$$a_ш = У_с – У_{сш} = 13{,}8 – 5{,}27 = 8{,}53\ см.$$
$$a_п = У_с – У_{сп} = 13{,}8 – 15 = -1{,}2\ см.$$
$$a_у = У_с – У_{су} = 13{,}8 – 18{,}3 = -4{,}5\ см.$$

Знак минус означает, что центр тяжести составного сечения оказался ниже центра тяжести данного его элемента.

$$b_ш = X_с – X_{сш} = 18{,}2 – 9 = 9{,}2\ см.$$
$$b_п = X_с – X_{сп} = 18{,}2 – 18{,}8 = -0{,}6\ см.$$
$$b_у = X_с – X_{су} = 18{,}2 – 23{,}9 = -5{,}7\ см.$$

Знак минус означает, что центр тяжести составного сечения оказался левее центра тяжести данного его элемента.

Вычисленные значения поместим в таблицу 2.

Таблица 2.

Результаты расчетов координат центров тяжести составного сечения

Название профиля	Хс, см	Ус, см	а, см	b, см
Прямоугольник 1,6Х30	18,8	15	-1,2	-0,6
Уголок №16(10)*	23,9	18,3	-4,5	-5,7
Швеллер №18	9,0	5,27	8,53	9,2
Составное сечение	18,2	13,8	-	-

2.3. Определение моментов инерции составного сечения относительно центральных осей

На построенном ранее чертеже сечения (см. рис. 5) проведем центральные оси Хс и Ус через центр тяжести составного сечения т. С, которые параллельны выбранным ранее рабочим осям Хр и Ур.

На рис. 6. показаны эти оси, а также показаны оси Хсш, Усш, Хсп, Усп, Хсу, Усу, относительно которых мы ранее определили моменты инерции и занесли в таблицу 1.

Зная моменты инерции швеллера, прямоугольника, уголка относительно этих осей (см. таблицу 1), мы можем вычислить моменты инерции для этих же фигур, но относительно новых осей Хс и Ус, которые являются центральными осями для всего составного сечения. Оси Хсш, Усш, Хсп, Усп, Хсу, Усу параллельны осям Хс и Ус и поэтому для расчета моментов инерции относительно них, можно воспользоваться формулами параллельного переноса для осей координат.

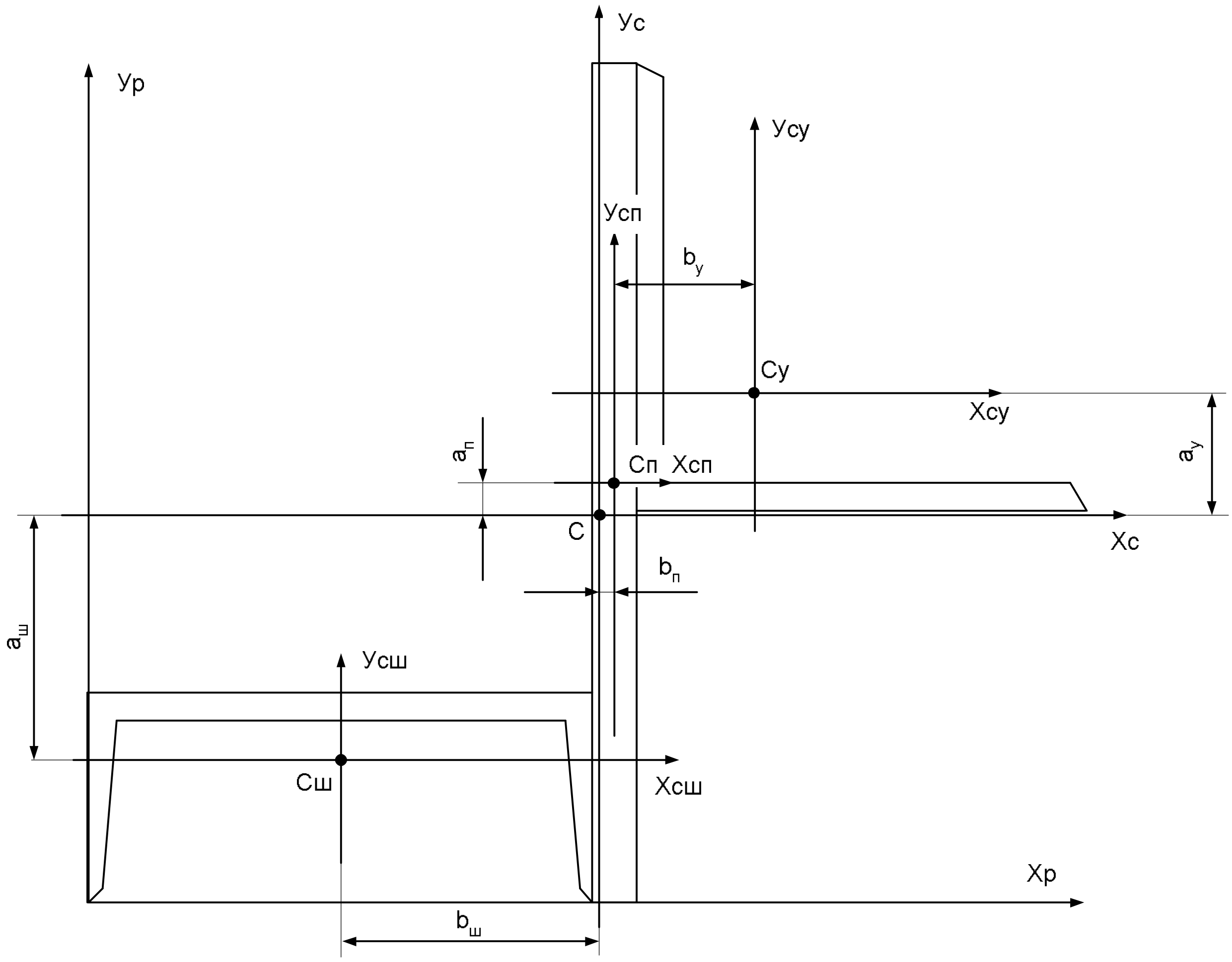

Рис. 6. Пояснения к расчету расстояний между центральными осями каждого элемента и всего составного сечения.

Тогда моменты инерции для швеллера относительно осей Хс и Ус будут равны.

$$I_{X_C}^{Ш} = I_{X_{СШ}} + a_{Ш}^2 \cdot F_{Ш} = 105 + 8{,}53^2 \cdot 22{,}2 = 1720{,}29\ см^4$$

$$I_{У_C}^{Ш} = I_{У_{СШ}} + b_{Ш}^2 \cdot F_{Ш} = 1190 + 9{,}2^2 \cdot 22{,}2 = 3069{,}01\ см^4$$

$$I_{X_C У_C}^{Ш} = I_{X_{СШ} У_{СШ}} + a_{Ш} \cdot b_{Ш} \cdot F_{Ш} = 0 + 8{,}53 \cdot 9{,}2 \cdot 22{,}2 = 1742{,}17\ см^4$$

Тогда моменты инерции для прямоугольника относительно осей Хс и Ус будут равны.

$$I_{X_C}^{П} = I_{X_{СП}} + a_{П}^2 \cdot F_{П} = 3600 + (-1{,}2)^2 \cdot 48 = 3669{,}12\ см^4$$

$$I_{У_C}^{П} = I_{У_{СП}} + b_{П}^2 \cdot F_{П} = 10{,}24 + (-0{,}6)^2 \cdot 48 = 27{,}52\ см^4$$

$$I_{X_C У_C}^{П} = I_{X_{СП} У_{СП}} + a_{П} \cdot b_{П} \cdot F_{П} = 0 + (-1{,}2) \cdot (-0{,}6) \cdot 48 = 34{,}56\ см^4$$

Тогда моменты инерции для уголка относительно осей Хс и Ус будут равны.

$$I_{X_C}^{У} = I_{X_{CУ}} + a_{У}^{2} \cdot F_{У} = 744 + (-4{,}5)^2 \cdot 31{,}4 = 1379{,}85\ см^4$$

$$I_{У_C}^{У} = I_{У_{CУ}} + b_{У}^{2} \cdot F_{У} = 744 + (-5{,}7)^2 \cdot 31{,}4 = 1764{,}19\ см^4$$

$$I_{X_C У_C}^{У} = I_{X_{CУ} У_{CУ}} + a_{У} \cdot b_{У} \cdot F_{У} = -455 + (-4{,}5) \cdot (-5{,}7)\ \ \cdot 31{,}4 = 350{,}41\ см^4$$

Моменты инерции швеллера, прямоугольника и уголка рассчитаны относительно одних и тех же осей Хс и Ус, поэтому их можно сложить. Тогда моменты инерции составного сечения относительно центральных осей Хс и Ус равны сумме трех соответствующих моментов инерции.

Ixc = 1720,29 + 3669,12 + 1379,85 = 6769,26

Iyc = 3069,01 + 27,52 + 1764,19 = 4860,72

Ixcyc = 1742,17 + 34,56 + 350,41 = 2127,14

2.4. Определение положения главных осей и вычисление главных моментов инерции

По формуле 9 определяем угол, на который следует повернуть центральные оси Хс и Ус, чтобы они стали главными центральными осями сечения:

$$tg\,2\alpha_0 = \frac{2 \cdot 2127{,}14}{4860{,}72 - 6769{,}26} = -2{,}2291$$

Отсюда можно определить величину угла, вычислив арктангенс от числа -2,2291 и разделив результат пополам:

$$\alpha_0 = -32{,}92^{o}\,(-32^{o}\ 55')$$

Знак минус говорит о том, что поворот центральных осей нужно выполнить по направлению часовой стрелки.

Нанесем оси Хо и Уо на чертеж, поворачивая оси Хс и Ус на угол α_0 по часовой стрелке.

Теперь осталось последнее – используя формулы поворота осей координат 9, вычисляем главные моменты инерции составного сечения.

$$I_{x0} = 6769{,}26 \cdot Cos^2(-32{,}92^o) + 4860{,}72 \cdot Sin^2(-32{,}92^o) - 2127{,}14 \cdot Sin(2 \cdot (-32{,}92^o)) = 8146{,}37\,см^4$$

$$I_{y0} = 4860{,}72 \cdot Cos^2(-32{,}92^o) + 6769{,}26 \cdot Sin^2(-32{,}92^o) + 2127{,}14 \cdot Sin(2 \cdot (-32{,}92^o)) = 3483{,}61\ см^4$$

$$I_{x0y0} = 2127{,}14 \cdot Cos(2 \cdot (-32{,}92^o)) + \frac{6769{,}26 - 4860{,}72}{2} \cdot Sin(2 \cdot (-32{,}92^o)) = -0{,}07 \approx 0$$

Наибольшим оказался момент инерции относительно оси Хо Ixo = 8146,37 см^4. Момент инерции относительно оси Уо является экстремально минимальным моментом инерции заданного составного сечения Iyo = 3483,61 см^4. Центробежный момент инерции относительно осей Хо и Уо оказался равным нулю. Это условие является проверкой правильности решения задачи: центробежный момент равен нулю относительно главных осей сечения. Чтобы обеспечить наибольшую жесткость сечения при изгибе, следует внешнюю изгибающую силу Р приложить так, чтобы изгиб происходил вокруг оси Хо, т.е. силу нужно приложить вдоль оси Уо так, как это показано на рис. 7.

Эти заключения можно привести в качестве вывода по данной лабораторной работе

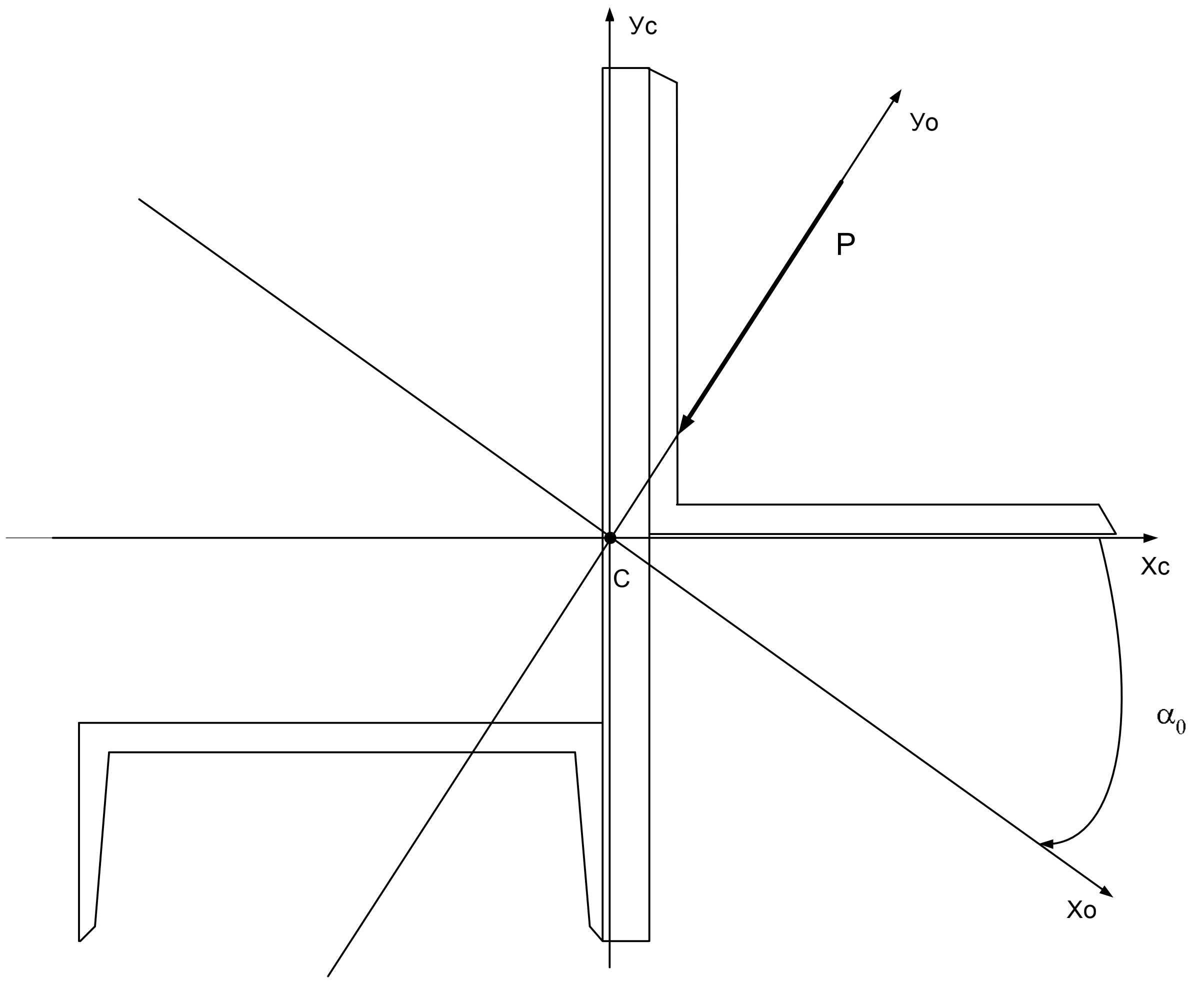

Рис. 7. Положение главных центральных осей составного сечения.

На рис. 8 приводятся схемы составных сечений для самостоятельного решения.

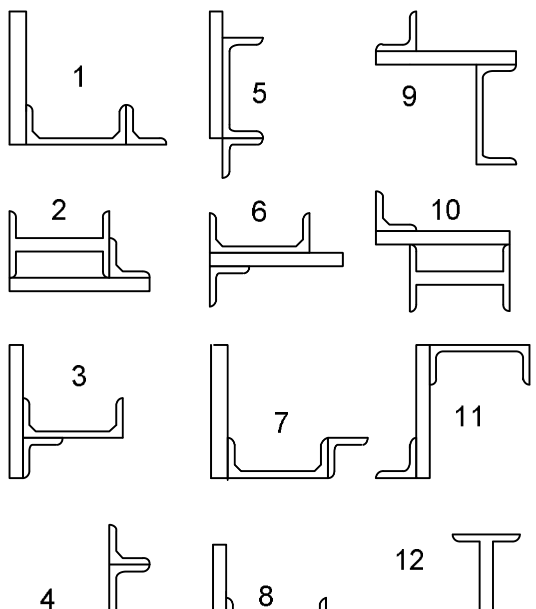

Рис. 8. Задания для самостоятельной работы.